This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908773 6

Die Grundlehren

der

Variationsrechnung.

Von

J. H. Jellett.

Frei bearbeitet

von

Dr. C. H. Schnuse.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1860.

Vorrede.

Ein methodisches Lesebuch der Elemente der Variationsrechnung ist immer noch ein Bedürfniß der deutschen mathematischen Literatur — ungeachtet der wiederholten Bearbeitungen dieser Wissenschaft in den letzten Jahren. — Daß in der That hier noch mancher unnütze Formalismus und unbegründete Schluß zu beseitigen und zu berichtigen, so wie manche wesentliche Lücke auszufüllen ist — soll in diesem Vorworte etwas näher erörtert werden, damit der Leser — besonders der Anfänger — leichter beurtheilen kann, wodurch sich die vorliegende deutsche Ausgabe von Jellett's Elementary Treatise on the Calculus of Variations (Dublin 1852) unterscheidet, resp. auszeichnet, vor andern ähnlichen Werken, und was noch zu wünschen übrig bleibt. —

Schon das erste Kapitel des vorliegenden Lehrbuches wird den unbefangenen Leser hinreichend überzeugen: daß es zu der strengsten, elegantesten und objectiv richtigsten Begründung der Variationsrechnung weder der Einführung einer sonst garnicht in der gesuchten Function $y = f(x)$ vorkommenden Hülfsveränderlichen $\varkappa, t, \ldots$, noch der unendlichen Reihenentwickelungen bedarf. —

Man soll sich nämlich statt der Function $y = f(x)$, um eine unendlich kleine Variation derselben zu ermitteln, eine andere Function $\Phi(x, \varkappa)$ oder $\Phi(x, t)$ denken, welche so beschaffen ist: daß sie für verschiedene Werthe von t beliebige Formen annehmen kann — und für $t = 0$ sich auf $y = f(x)$ reducirt. — Alsdann soll $\left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0 dt$ oder $\frac{d\Phi(x,0)}{dt}\,dt = \Omega(x)\,dt$ die verlangte unendlich kleine Variation von $y = f(x)$ sein, indem $\Omega(x)$ eine ganz unbestimmte Form haben soll, weil bei allen Anwendungen der Variationsrechnung $y = f(x)$ in eine bestimmte gegebene Function $F(x)$ überzugehen, nicht verlangt werde — und daraus soll alsdann ohne Weiteres erhellen: daß alle für das Differenziren feststehenden

Regeln auch für das Variiren ihre Gültigkeit behalten. — Ferner sollen die höhern Variationen $\delta^2 y = \left(\frac{d^2\Phi}{dt^2}\right)_0 dt^2$, &c. ganz independent von einander sein — und eine kleine endliche Variation $\triangle y$ oder ∇y soll ausgedrückt werden durch:

$$\triangle y \text{ oder } \nabla y = \delta' y\tau + \delta'^2 y \frac{\tau}{1.2} + \delta'^3 y \frac{\tau^3}{1.2.3} + \ldots \quad (\alpha)$$

wo τ ein kleiner, aber endlicher Werth von t ist, und $\delta' y$, $\delta'^2 y$, $\delta'^3 y \ldots$ die successiven Variationsquotienten, d. h. die resp. durch dt, dt^2, dt^3, ... dividirten Variationen δy, δy^2, δy^3, ... bedeuten. —

Offenbar ist diese ganze, von Euler herrührende Begründung der Variationsrechnung ebenso illusorisch, als unnöthig. — Denn die Behauptung: daß eine Function $\Phi(x, t)$ dadurch, daß man einer in ihr vorkommenden Größe t verschiedene Werthe beilegt, jede beliebige Form soll annehmen können — und zugleich sich für $t = 0$ auf eine ganz bestimmte, wenn auch noch unbekannte Function $y = f(x)$ reducirt, enthält einen Widerspruch — und die Annahme: daß die successiven Variationen von $y = f(x)$ nichts anders sein sollen, als die successiven partiellen Differentiale von $\Phi(x, t)$ nach t für $t = 0$, hat sogar noch zur offenbaren Folge: daß die Variationen δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, ... als von einander abhängig erscheinen, was doch wieder nicht der Fall sein soll, wie man an Beispielen zu zeigen sucht — als ob allgemeine Wahrheiten durch Beispiele allgemein bewiesen werden könnten! — Ganz sinnlos ist endlich eine Gleichung wie (α) mit einer unendlichen Reihe, zwischen deren Gliedern gar keine gegenseitige Abhängigkeit stattfinden soll. —

Daß man sich von einer Function $y = f(x)$ unzählig viele verschiedene Formänderungen denken kann, die alle nur unendlich kleine Werthsänderungen derselben zur Folge haben — ist geometrisch ohne Weiteres klar — denn man kann sich offenbar zu beiden Seiten der durch $y = f(x)$ ausgedrückten Curve unzählig viele verschiedene Curven denken, welche jener alle unendlich nahe liegen — und wenn man dasselbe analytisch ausdrücken will; so braucht man nur $\delta y = i\psi(x)$ zu setzen, wo i unendlich klein ist, und die Function $\psi(x)$ weiter keiner Bedingung unterliegt, als der: daß sie für keinen zulässigen Werth von x unendlich wird —

und wenn Differentialquotienten derſelben vorkommen, daß auch dieſe für keinen zuläſſigen Werth von x unendlich werden (Nr. 4 und Nr. 9). Damit iſt die Sache vollſtändig und in der evidenteſten Weiſe erledigt! —

Hr. Dr. G. W. Strauch, dem man ein koloſſales Werk über Variationsrechnung *) verdankt, dagegen meint: daß durch die Einführung einer neuen Veränderlichen $\varkappa$ oder t die Variationsrechnung auf ihre wahre Grundlage gebracht ſei — läßt deshalb $y = \varphi(x)$ in $\varphi(x, \varkappa)$ übergehen, und entwickelt dieſe letzte Function in:

$$y + \Delta y = \varphi(x) + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\delta^2 y + \ldots \qquad (\beta)$$

ſo daß die Variation von $y = \varphi(x)$ durch die ganze unendliche Reihe:

$$\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\delta^2 y + \ldots \qquad (\gamma)$$

ausgedrückt werden ſoll, wo zur Abkürzung δy ſtatt $\left(\frac{d\varphi(x,\varkappa)}{dx}\right)_0$, $\delta^2 y$ ſtatt $\left(\frac{d^2\varphi(x,\varkappa)}{dx^2}\right)_0$, &c. geſetzt iſt. Merkwürdigerweiſe fügt er jedoch ſelbſt ausdrücklich hinzu: daß dieſe Reihenentwickelung eine blos fingirte Operation ſei, ſo wie die dadurch geſetzte Beziehung zwiſchen $\delta y = \delta\varphi$, $\delta^2 y = \delta\varphi, \ldots$, weil jede dieſer Größen ja für ſich ganz willkürlich ſei! —

Als Grund dafür: daß die ganze unendliche Reihe (γ), und nicht blos ihr erſtes Glied als Variation von $y = \varphi(x)$ genommen werden müſſe, wird angegeben: daß die unendliche Reihe der allgemeine Begriff ſei, und die geſchloſſene als beſondere in ſich faſſe, ꝛc. — Man kann ſich keine närriſchere Logik denken! — Hier kann man füglich mit Herbart ſagen: „Es nimmt ſich immer ſeltſam aus, wenn man etwas, das unmittelbar vor Augen liegt, erſt aus Anderm ableitet, was nicht einmal denſelben Grad der Klarheit hat.“ —

Selbſt der erſte Anfänger muß ſich „wundern“ über dieſe vermeintliche Begründungsarten der Variationsrechnung, wenn

*) Theorie und Anwendung des ſogenannten Variationscalculs. Zweite (Titel-) Ausgabe in 2 Bänden. Zürich 1854.

er, sobald es zur That, d. h. zur wirklichen Variation gegebener Ausdrücke kommt, sieht: daß die ganze Operation in weiter nichts besteht, als in der gewöhnlichen Differentiation dieser Ausdrücke nach den darin als dem Werthe, oder der Form nach veränderlich gedachten Elementen, wobei diese beiden Arten der Aenderungen blos durch die Zeichen d und δ unterschieden und letztere höchstens noch versetzt werden! — Ebensowenig, als man in der Differentialrechnung von der Independenten x, so lange sie in der That noch eine solche ist, höhere Differentiale d^2x, d^3x, ... zu betrachten braucht — ebenso unnöthig ist die Betrachtung höherer Variationen δ^2y, δ^3y, ... einer primitiven oder unabhängigen Function y in der Variationsrechnung. — In einer wahrhaft komischen Weise ergeht sich Hr. Dr. Strauch *) über diejenigen Schriftsteller, welche die variirte Function durch $y + \delta y = \varphi(x) + i\psi(x)$, also die Variation durch $\delta y = i\psi(x)$ darstellen (s. Nr. 4 u. 9). — Er nennt sie „Leute (!), welche ihren Irrthum (?) begingen, weil sie über das, was sie unternahmen, sich nicht klar waren, weil sie ohne alle Umsicht, Uebersicht und Erfahrung zu Werke gingen, weil es ihnen gleichgültig war, ob sie eine gediegene Arbeit, oder ein übereiltes Machwerk lieferten (!); ihr erster Variationscoefficient sei nur durch die Zufälligkeiten des Calculs richtig — dagegen würde der der zweiten Ordnung, wenn sie ihn hergestellt hätten, in den meisten Fällen falsch sein (?). Allein diesen haben sie aus Bequemlichkeit, oder Unfähigkeit niemals hergestellt, sondern seien auf halbem Wege stehen geblieben, ꝛc." —

In rein wissenschaftlichem Interesse — und besonders in dem der ersten Anfänger — müssen wir hier nachweisen: daß alle diese Vorwürfe (die Uebereilung und Bequemlichkeit ausgenommen) gerade Hrn. Dr. Strauch selbst in sehr wesentlichen Punkten und in keinem geringen Grade treffen. —

1) Hr. Dr. Strauch sagt: daß die ursprüngliche Form des δU, nämlich (Nr. 11):

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + \ldots + P_n\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)dx \qquad (\delta)$$

bisher von Niemanden zur Bestimmung der gesuchten Function be-

*) Variat. Calcul Bd. 1, S. 164—165.

nutzt ist, sei eine Einseitigkeit (?) — den Beweis dafür sei man schuldig geblieben — und da er — wie er selbst sagt — ebensowenig einen Beweis aufstellen könne, wie seine Vorgänger — so untersuche er beide Formen, nämlich die vorhergehende und die transformirte Form:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(N-\frac{dP_1}{dx}+\frac{d^2P_2}{dx^2}-\ldots(-1)^n\frac{d^nP_n}{dx^n}\right)\delta y\,dx, \qquad (\varepsilon)$$

und fügt ganz naiv hinzu: daß seine Vorgänger, wenn sie mit der großen Klasse von Aufgaben, wie die in Nr. 24 unseres Lehrbuches vertraut gewesen wären, sie auch auf den Gedanken gekommen wären, zu untersuchen, ob die erste Form (δ) zu einem Resultate führe, oder nicht. — Die Thatsache aber, daß diese erste Form nicht immer (oder vielmehr niemals, wenn außer δy auch $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, ... unter dem Zeichen $\int$ vorkommen) zu einem Resultate führt, berechtige keineswegs zu der Bequemlichkeit(?) dieselbe ganz unberücksichtigt zu lassen und nur die zweite Form (ε) zu untersuchen! —

Da Hr. Dr. Strauch selbst sagt: daß er nicht weiß, weshalb die erste Form (δ) immer in die zweite (ε) umgesetzt werden muß, was auch daraus erhellet: daß er meint, man könne die gesuchte Function eventuell dadurch finden, daß man in (δ) die Coefficienten von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, ... einzeln $=0$ setzt, wie bei Ausdrücken ohne Integrale; so müssen wir ihn, trotz seiner klaren, tiefen Ein- und Umsicht, Erfahrung ꝛc., deren er sich seinen Vorgängern gegenüber bewußt sein muß, denn sonst würde er nicht so zuversichtsvoll und energisch auftreten — hier doch etwas zurechtzuweisen und aufzuklären suchen, damit er in Zukunft mit seinen Urtheilen und Behauptungen ein wenig vorsichtiger und anständiger wird. — Zunächst ist klar, daß man nicht setzen kann:

$$N\delta y+P_1\frac{d\delta y}{dx}+\ldots+P_n\frac{d^n\delta y}{dx^n}=0,$$

weil man dadurch eine Relation zwischen δy, und y, $\frac{dy}{dx}$, ... erhielte, was unstatthaft ist. — Aber ebensowenig darf man die Coefficienten

von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, ... einzeln $= 0$ setzen, weil, wie jeder Anfänger weiß, und auch Hr. Dr. Strauch selbst sagt: die Größen $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, ... der Form nach alle von δy abhängen — so daß durch die Form von δy auch die seiner successiven Differentialquotienten bestimmt ist — und weil bei Functionen, die unter den bestimmten Integrationszeichen stehen, es eben nur auf diese Form ankommt — und nicht auf die Werthe von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, ... für einzelne Werthe von x, wie bei den außerhalb des Integralzeichens stehenden Gliedern — oder überhaupt bei Ausdrücken ohne das Integralzeichen. — Deshalb, und aus keinem andern Grunde, müssen $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, ... in allen Fällen, wo sie mit, oder ohne δy unter dem Zeichen $\int$ vorkommen, erst durch theilweise Integration unter diesem Zeichen weggeschafft werden, so daß blos δy unter demselben bleibt. — Da sogar ein Autor, wie Hr. Dr. Strauch, der sich mit der Variationsrechnung so umständlich befaßt hat, nicht weiß und nicht einsieht, weshalb die Form (δ) immer in die Form (ε) transformirt werden muß, wenn $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, ... darin vorkommen; so scheint es doch nothwendig: daß solches in Lehrbüchern für Anfänger künftig etwas näher angegeben wird, was gewöhnlich nicht geschieht, so daß das hier Gesagte auch als Ergänzung zu Nr. 11 unseres Lehrbuches dienen kann. —

2) Von der Euler'schen (Lagrange'schen) Methode für relative Max. und Min. behauptet Hr. Dr. Strauch: daß sie an bedeutenden Gebrechen leide (?); aber zum Glück ist seine Argumentation hier wieder ebenso abgeschmackt, wie in dem vorhergehenden Falle. — Das Possirlichste dabei ist jedoch, daß er selbst sagt: sie sei allgemein und gebe jederzeit richtige Resultate — und daß er, nachdem er mehrere Folioseiten mit einem ebenso zweck- als sinnlosen Formelkram bedeckt hat, zuletzt doch auf die Euler'sche Formel kommt! — Es würde sich nicht der Mühe lohnen — und auch viel zu umständlich sein, wenn wir hier alle die unbegründeten, ja närrischen Behauptungen des Hrn. Dr. Strauch anführen wollten — man muß sie an Ort und Stelle (Bd. 1, S. 339 folgg. und Bd. 2,

S. 742) selbst nachsehen — und wir wollen blos noch bemerken, daß er auch den Ausdruck der zweiten Variation entwickelt, worin natürlich der unbestimmte Multiplicator L vorkommt, von dessen Zeichen das dieser Variation abhängen soll! — Bei der Aufgabe der Curve von gegebener Länge und der größten, oder kleinsten Fläche (Bd. 2, S. 496) z. B. heißt es: „Somit gelangt man zu der Erkenntniß, daß $\delta^2 U$ positiv, oder negativ ist, jenachdem L positiv, oder negativ ist. — Diese Erscheinung hängt aber mit folgendem Umstande zusammen: Es kann ein Kreisbogen, ohne daß er seine Länge ändert, auf zweierlei Weise zwischen zwei Punkten gezogen werden, d. h. entweder concav, oder convex gegen die Abscissenaxe. Im ersten Falle ist der Flächeninhalt ein Max. und im zweiten ein Min. — Dieselbe unbegründete Argumentation kehrt bei der Kettenlinie, elastischen Linie, ꝛc. und überhaupt bei Aufgaben über relative Max. und Min. wieder. — Offenbar hätte Hr. Dr. Strauch den unbestimmten Factor L mittelst der Hauptgleichung aus $\delta^2 U$ eliminiren müssen — und erst dann hätte er einen begründeten Schluß in Bezug auf die Unterscheidung des Max. und Min. machen können. — Oder er hätte zeigen müssen: daß die Fläche zwischen der Sehne und dem Kreisbogen ein Max. ist! — Uebrigens hat Maclaurin (Treatise of Fluxions 1742) schon zwei Jahre vor Euler dasselbe Verfahren angewandt. —

3) Hr. Dr. Strauch stellt auch Aufgaben und untersucht sie umständlich, von denen er selbst sagt: „daß sie gar keine sind" (!); z. B. die Aufg. 232, 234, 236, ꝛc. — Zuletzt weist er einen Widerspruch nach, und fügt wörtlich hinzu: „Andere Schriftsteller haben die Nothwendigkeit der Untersuchung, ob ein Widerspruch stattfinde, ganz übersehen, und deshalb Irrthümer begangen (?!). —" Das wäre ein interessantes Geschäft: Aufgaben, deren Ungereimtheit selbst dem ersten Anfänger auf den ersten Blick in die Augen fällt, durch die Variationsrechnung zu untersuchen, um sich von dieser Ungereimtheit zu überzeugen. — Bei wirklichen Angaben, welche im Allgemeinen einen Sinn haben, hätte Hr. Dr. Strauch diese Untersuchung anstellen sollen; allein da fehlt sie fast gänzlich — und er begnügt sich mit der bloßen Unterscheidung des Max. und Min. — Und selbst diese ist, wie wir eben gesehen haben, oft ungenügend! — Allgemeine Untersuchungen über die Möglichkeit der Aufgabe und deren Ausnahmefälle, wie sie in Nr. 27

und 28, sowie in Nr. 58 und 59 unseres Lehrbuches vorkommen, hat Hr. Dr. Strauch nicht für nöthig gehalten. — Die vollständige Untersuchung jeder einzelnen Aufgabe war aber schon deshalb nicht möglich, weil seine Form von $\delta^2 U$ dazu gar nicht tauglich ist. —

Gerade bei Hrn. Dr. Strauch wird durch die Zufälligkeiten des Calculs manches berichtigt — z. B. die zweite Variation in Folge der Hauptgleichung — indem die Glieder mit den zweiten Variationen der unabhängigen Functionen, welche ganz unnöthiger Weise entwickelt werden, wieder beseitigt werden. —

4) Hr. Dr. Strauch hat auch zusammengesetzte Variationen ersonnen; d. h. er läßt eine abhängige Function $z = \varphi(x, y)$ nicht blos mittelbar dadurch variiren: daß y seine Form ändert, sondern auch unmittelbar, wie eine primitive Function y, und macht davon eine herrliche Anwendung auf folgende Aufgabe: „Man sucht eine krumme Fläche und eine in derselben liegende räumliche Curve von gegebener Länge k, so daß das von der gesuchten Curve begrenzte Stück der gesuchten krummen Fläche den kleinsten Flächeninhalt hat." — Nach einer Formelproduktion von acht Folioseiten gelangt er endlich zu dem wichtigen Resultate: Die gesuchte Fläche ist die Ebene $z = A$, und die gesuchte Curve ist der Kreis! — Also die Kreislinie schließt bei einer gegebenen Länge k die kleinste Fläche ein! — Horribile dictu! — Und zuletzt heißt es: „Diese Aufgabe ist besonders geeignet, die Wichtigkeit meiner Idee der zusammengesetzten Mutationen (Variationen) darzuthun; ꝛc.!" — Es wird nicht nöthig sein, hierüber auch nur noch ein Wort hinzuzufügen! —

5) Eine sehr ergiebige Quelle zu entsetzlichen unnützen Weitläufigkeiten bietet Hrn. Dr. Strauch die Untersuchung aller möglichen Grenzfälle dar — und er hat z. B. mittelst derselben über die triviale Aufgabe von der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten oder Linien nicht weniger denn 40 Folioseiten producirt! — Man kann sich keine abusivern Anwendungen der Variationsrechnung denken, als auf solche triviale Probleme der Elementargeometrie — abgesehen von den sonstigen Mängeln und unnützen Weitläufigkeiten. — Wollte Hr. Dr. Strauch alle Theile der mathematischen Wissenschaft in dieser Weise bearbeiten, so würden unfehlbar die Folianten

der alten Kirchenväter zum Vorschein kommen, denen sich die beiden vorliegenden Bände von etwa 1300 Seiten sehr gut anschließen würden. —

6) Was endlich die Herstellung und Transformation der zweiten Variation $\delta^2 U$ betrifft, welche nebst der beständigen Wiederholung der sinnlosen unendlichen Reihen, der Betrachtung der nicht transformirten Form (δ) von δU, der Grenzfälle ꝛc. wegen der vielen unnützen Glieder ebenfalls ein gutes Raumerfüllungsmittel ist — und nebst jenen immer in einer Schlußbemerkung zu jeder Aufgabe als besonderes Verdienst (?) des Verfs. um die Wissenschaft der Variationsrechnung hervorgehoben wird; so ist dieselbe, sowohl in dem einfachsten Falle eines einfachen Integrales mit nur einer unabhängigen Function y und deren Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$, als besonders in dem Falle mehrere solcher Functionen und mehrfacher Integrale, eine völlig grund- und bodenlose. — Gleichwohl hat sich dabei ein Unterscheidungskriterium des Max. und Min. herausgestellt, welches in dem ersten der vorhin erwähnten Fälle mit dem nach der Jacobi'schen Transformationsmethode gefundenen (Nr. 40) übereinstimmt; also richtig ist; aber der andere quadratische Factor unter dem Integralreichen hat, wie schon bemerkt, selbst in diesem einfachsten Falle, durchaus nicht diejenige Form, daß sich daraus die übrigen Bedingungen für die wirkliche Existenz eines Max. oder Min. ableiten lassen, wie solches bei der Jacobi'schen Behandlung der Fall ist. — In der That hat auch Hr. Dr. Strauch daran gar nicht gedacht! —

Für den Fall:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^m z}{dx^m} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

ist dieses Kriterium dasselbe, wie in der Differentialrechnung bei Functionen mit zwei independenten Veränderlichen; d. h. wenn zur Abkürzung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p, \quad \frac{d^m z}{dx^m} = q$$

gesetzt wird; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2V}{dp^2}=\mp,\ \frac{d^2V}{dq^2}=\mp\end{array}\right\}\ \text{Max.}\atop\text{Min.}$$

$$\left(\frac{d^2V}{dpdq}\right)^2-\frac{d^2V}{dp^2}\cdot\frac{d^2V}{dq^2}=-\ \Big\}\ \text{Max. und Min.}$$

In dem Beispiele in Nr. 55 hätte man hiernach:

$$V=\sqrt{(+p^2+q^2)},\ \frac{d^2V}{dp^2}=\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=+,$$

$$\frac{d^2V}{dq^2}=\frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=+,\ \left(\frac{d^2V}{dpdq}\right)^2=\frac{p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^3},$$

mithin:

$$\left(\frac{d^2V}{dpdq}\right)^2-\frac{d^2V}{dp^2}\cdot\frac{d^2V}{dp^2}=-\frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}=-,$$

wie es für das in diesem Falle sich von selbst verstehende Minimum sein muß. — Allein damit ist im Allgemeinen die Sache noch lange nicht erledigt, sondern δ^2U muß auf eine solche Form, und auf solchen Wegen, gebracht sein, daß sich auch die übrigen Bedingungen für das wirkliche Stattfinden eines Max. oder Min. daraus erkennen lassen, wie bei der Jacobi'schen Transformation, was jedoch bei der Strauch'schen hier noch viel weniger thunlich ist, wie in dem ersten einfachsten Falle. —

Dasselbe Unterscheidungskriterium findet Hr. Dr. Strauch auch in dem Falle eines Doppelintegrales $U=\iint V dydx$ mit constanten Grenzen, wo $V=f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy}\right)$ ist; allein hier ist die Herleitung noch precärer, als in den beiden früheren Fällen. — Ein späterer, viel gründlicher und methodischer zu Werke gehender Bearbeiter der Variationsrechnung, Hr. Prof. Stegmann, hat wohl deshalb einen andern Weg eingeschlagen, indem er die Aenderung des betrachteten Integrales von dem eventuellen Maximums- oder Minimumswerthe aus dadurch bestimmt: daß er die darin vorkommenden veränderlichen Elemente Incremente annehmen läßt, um zu sehen, ob diese Aenderung positiv oder negativ ist.*) — Allein

*) Lehrbuch der Variationsrechnung, Kassel 1854.

dieſes Verfahren genügt ebenfalls nicht, weil es die weitern Bedingungen für die wirkliche Exiſtenz eines Maximums, oder Minimums nicht erkennen läßt — und iſt auch ſehr unelegant. — Am allerwenigſten braucht man daſſelbe in dem Falle anzuwenden, wo die Jacobi'ſche Transformation ein viel bequemeres Unterſcheidungskriterium des Max. und Min. an die Hand gibt. — Was die übrigen, im Vorhergehenden beſprochenen Punkte betrifft, ſo wird man ohne ſpecielle Angabe leicht beurtheilen, welche unſerer Bemerkungen, und in welchem Grade ſie auch in Bezug auf das Stegmann'ſche Lehrbuch Anwendung finden. — Soll eine Aufgabe der Variationsrechnung vollſtändig gelöſt ſein, ſo muß ſie in allen Beziehungen, und nicht blos in Bezug auf die Unterſcheidung des Max. und Min. unterſucht ſein — etwa wie die einfachen Beiſpiele in Nr. 48 und Nr. 51—52 unſeres Lehrbuches. — Davon iſt man freilich in den ſchwierigern Fällen noch ſehr weit entfernt — namentlich bleibt die Transformation der zweiten Variation bei Integralen mit mehrern primitiven Functionen und bei mehrfachen Integralen in einer Weiſe, die daſſelbe leiſtet, wie die Jacobi'ſche in dem Falle eines einfachen Integrales mit einer primitiven Function y und deren Differentialquotienten y', y'',... noch zu wünſchen übrig. —

Nach allem Vorhergehenden und der genauen Durchſicht des vorliegenden Lehrbuches der Variationsrechnung wird man endlich leicht beurtheilen, was daſſelbe leiſtet, und wodurch es ſich von allen bisher erſchienenen ähnlichen Werken unterſcheidet, reſp. auszeichnet. —

Schließlich mag hier noch bemerkt werden: daß eine kurze hiſtoriſche Einleitung des Originales in der deutſchen Ausgabe hinweggelaſſen iſt, weil dieſelbe garzu unvollſtändig iſt — und eine ausführlichere Geſchichte der Variationsrechnung von Dr. Gieſel zu erwarten ſteht. —

München, im Januar 1860.

Dr. Schnuſe.

Inhaltsverzeichniß.

		Seite
Erſtes Kapitel:	Definitionen und Principien	1
Zweites Kapitel:	Variation der Functionen einer Independenten .	13
Drittes Kapitel:	Maxima und Minima der abhängigen Functionen einer unabhängigen Function .	36
Viertes Kapitel:	Anwendungen des Vorhergehenden auf Geometrie, und zwar: A. auf die Theorie der Curven .	153
Fünftes Kapitel:	Ueber vielfache Integrale im Allgemeinen . .	227
Sechstes Kapitel:	Variation der Functionen von zwei und mehr Independenten	244
Siebentes Kapitel:	Maxima und Minima ſolcher Functionen . .	264
Achtes Kapitel:	Anwendungen auf Geometrie, und zwar: B. auf die Theorie krummer Flächen	304
Neuntes Kapitel:	Anwendung der Variationsrechnung auf Mechanik	316
Zehntes Kapitel:	Anwendung der Variationsrechnung auf die Beſtimmung der Integralitätsbedingungen von Differentialfunctionen einer und mehrerer independenter Veränderlicher.	367
Noten A, B, C, D u. E	. . . . .	392
Zuſatz zu Nr. 24—26	. . . . .	403
Zuſätze zu Kapitel 4	. . . . .	415

Druckfehler und Verbesserungen.

S.	1	Z.	13	statt ψ lies φ
"	4	"	20	" ein Calcul l. im Calcul
"	5	"	9	" $F.Fi\psi = i\psi$ l. $F.i\psi = iF.\psi$
"	17	"	21	" δy l. $\delta y dx$
"	21	"	1	" $+ - \{V_0$ l. $+ \{ - V_0$
"	—	"	6	" δy l. $\delta y dx$
"	22	"	7	" δy l. $\delta y dx$
"	—	"	12	" δz l. $\delta z dx$
"	23	"	28	" verſparer l. verſparen
"	25	"	8	" δy l. $\delta y dx$
"	—	"	13	" δz l. $\delta z dx$
"	27	"	7	" δy l. $\delta y dx$
"	—	"	8	" δz l. $\delta z dx$
"	30	"	14	" Factor l. Factor λ
"	31	"	8	" ψ l. $i\psi$
"	37	"	11	" ω^2 l. φ^2
"	39	"	9	" Function y l. Function y, die geſucht wird,
"	44	"	16	" dy_1 und dy_0 l. δy_1 und δy_0
"	45	"	1	" $\frac{dP^n}{dx^n}$ l. $\frac{d^n P_n}{dx^n}$
"	46	"	15	" $d.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ l. $\delta.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1$
"	51	"	18	" $= 0$ l. $= \theta$
"	53	"	22	" Gleichung l. Ordnung
"	55	"	22	" x l. x_1
"	56	"	12	" $P = \frac{dQ}{dx} +$ &c. l. $P_1 + \frac{dP_2}{dx} +$ &c.
"	58	"	9	" Wenn l. Wenn y und
"	60	"	23	" noch l. noch y und
"	67	"	15	" x_0, y_0 und x_1 l. x_1, y_1 und x_0
"	70	"	14	" a l. 1
"	80	"	3	" δy l. $\delta y dx$
"	—	"	5	" δx l. δy
"	86	"	18	" $(a - y_1)\}^2$ l. $(a - y_1)^2\}$
"	91	"	3	" und l. nur
"	104	"	25	" x_{11} l. x_1
"	106	"	7	" $+$ l. ,
"	114	"	10	" $C_1 x_1$ l. $(C_1 x_1$
"	115	"	14	" $\frac{db}{da}\Big)_1$ l. $\frac{db}{da}$
"	116	"	11	" $a^4 x_1{}^4$ l. $a^4 x_1{}^4 = 0$
"	119	"	6	" Differentionen l. Differentiationen
"	122	"	10 u. 11	" z l. $,z$
"	125	"	1	" $z +$ l. $z =$
"	127	"	3	" $= q$ l. $+ q$
"	130	"	3, 4 u. 5	" ſind alle drei Gleichungen mit (A) zu bezeichnen
"	137	"	1	" derſelben l. da dieſelben
"	—	"	20	" Coefficienten l. Coefficienten von
"	142	"	6	" $z = f(x, y \ldots)$ l. $z = f(x, y, \ldots)$, (x)

S. 142 Z. 7 st. welche lies welches

= 144 = 1 = $\int_0^{x_1}$ l. $\int_{x_0}^{x_1}$

= 145 = 15 = $)_1 = 0$ l. $)_0 = 0$

= 153 = 15 = vorkämen l. vorkommen

= 156 = 15 = $\cos\beta$ l. $\cos\beta)$

= 164 = 25 = $m = \frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}}$ l. $m = \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}}$

= 169 = 5 = für welche l. welche

= 170 = 20 = $+0$ l. $=0$

= 171 = 16 = $+c$ l. $-c$

= 172 = 5 = $x_0 = x_1$ l. $x_0 - x_1$

= 182 = 12 = iſoperimetriſche l. iſoperimetriſchen

= 183 = 24 = VI l. IV

= 192 = 6 = $+e\sin\theta$ l. $+e = \sin\theta$

= 194 = 8 = geſuchte l. geſucht

= 196 = 15 = $\frac{4}{8}$ l. $\frac{3}{4}$

= 198 = 7 = $\cdot\frac{dz}{ds}$ l. $-\frac{dz}{ds}$

= 199 = 15 = ds l. ds^2

= 205 = 21 = $\frac{d\mu}{dz}$ l. $\frac{d\mu}{dz} = 0$

= 215 = 4 = einer krummen Fläche l. im Raume

= 217 = 11 = ergibt l. ergibt ſich

= 219 = 13 = $-$ l. $+$

= 237 = 10 = der l. die

= 251 = 8 = dz l. δz

= 264 = 9 = DU l. D^2U

= 271 = 5 = $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dx}$ l. $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$

= 283 = 9 = Betrachten l. (3) Betrachten

= 291 = 3 = $F = 0$ l. $Fz = 0$

= 304 = 24 = $+p^2$ l. $1+p^2$

= 312 = 4 = $(1-q^2)r+$ l. $(1+q^2)r-$

= 313 = 1 = $\frac{1}{a}1$ l. $\frac{1}{a}(1$

= 314 = 18 = $\int y dx$ l. $\int y_0 dx$

= 321 = 17 = $n-1$ l. $n+1$

= 337 = 23 = unendliche l. unendlich

= 340 = 20 = $\frac{d^2V}{dq^2}+$ l. $\frac{d^2V}{dq^2} =$

= 352 = 27 = $d'z$ l. $\delta'z$

= 353 = 3 = 0 l. $=0$

= 355 = 22 = $\left(\frac{dV}{dz}\right)dz$ l. $\left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z$

= 375 = 7 = der zweiten l. der erſten und zweiten

= 388 = 26 = $R = R'$ l. $R + R'$

= 417 = 18 = f_0 l. f_1

= 432 = 26 = (2) l. (1)

Variationsrechnung.

Erstes Kapitel.

Definitionen und Principien.

1. Eine veränderliche Größe u heißt eine Function irgend einer Anzahl anderer Veränderlicher x_1, x_2 x_3, ... wenn zwischen diesen Größen eine solche Relation stattfindet, daß der Werth der erstern von den Werthen der letztern, welche die independenten Veränderlichen genannt werden, abhängt, und jene deshalb auch die abhängige Veränderliche genannt wird. — Die Natur dieser Relation heißt die Form dieser Function, und soll durch das Symbol φ angedeutet werden, indem man schreibt:

$$u = \psi(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Offenbar müssen Functionen von verschiedenen Formen auch durch verschiedene Symbole φ, f, ... bezeichnet werden. —

2. Hieraus erhellet: daß der Werth einer abhängigen Veränderlichen oder einer Function von zweierlei abhängt; nämlich: 1, von den Werthen der independenten Veränderlichen, und 2, von der Form der Function — sich also ändert, wenn sich jene Werthe, oder diese Form, oder endlich beide zugleich ändern. — Die Functionen sollen daher eingetheilt werden: 1, in bestimmte, d. h. deren Form als unveränderlich gedacht wird, und 2, in unbestimmte, oder deren Form veränderlich ist. — Diese Eintheilung entspricht der gewöhnlichen Eintheilung der Größen in constante und veränderliche. — Die Werthsänderungen bestimmter Functionen entspringen allein aus den Werthsänderungen einer, oder mehrerer der independenten Veränderlichen — und werden in der Differentialrechnung näher untersucht. — Aber die Werthsänderungen

unbeſtimmter Functionen, welche von einer Formänderung der Functionen allein, oder einer gleichzeitigen Werthsänderung der independenten Veränderlichen herrühren, bilden den Gegenſtand der ſ. g. Variationsrechnung, womit wir uns hier genauer beſchäftigen wollen. —

3. Offenbar kann die Form einer Function von der Form, oder den Formen einer, oder mehrerer anderer Functionen ſo abhängen: daß die Form der erſten beſtimmt iſt, wenn die der letztern es iſt. — Z. B. die Form eines Differentialquotienten jeder beliebigen Function iſt durch die Form derſelben beſtimmt, und umgekehrt: die Form einer beliebigen Function iſt durch die Form ihres Differentialquotienten fixirt. — Functionen, deren Form unabhängig iſt, ſollen primitive (unabhängige) heißen — und Functionen, deren Form von der ſolcher primitiver Functionen abhängt, ſollen derivirte (abhängige) genannt, und mit F, F' ... bezeichnet werden, ſo daß $F.\varphi$ oder $F(\varphi)$ eine Function bedeutet, deren Form von der der Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ abhängt. — Wenn ſich nun die Form einer, oder mehrerer primitiver Functionen ändert, ſo wird offenbar auch die Form der derivirten Function eine entſprechende Veränderung erfahren — und wenn die Relation zwiſchen den Formen der primitiven und der abhängigen oder derivirten Functionen als unveränderlich vorausgeſetzt wird;*) ſo iſt die Formänderung der letztern offenbar keine willkürliche, ſondern mit der Formänderung der erſtern durch eine feſte Relation verknüpft. — Die Beſtimmung dieſer Relation, oder vielmehr die Beſtimmung der Aenderung einer derivirten Function $F.\varphi$ in Folge einer **Form**änderung der primitiven Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$, und zuweilen auch der **Werths**änderung der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ bildet den eigentlichen Gegenſtand der **Variationsrechnung**. —

4. So wie aber in der Differentialrechnung die Aenderungen der betrachteten veränderlichen Größen nothwendig immer als unendlich, unbeſtimmt oder unangebbar klein gedacht werden

---

*) D. h. die durch das Symbol F angedeutete Operation dieſelbe bleibt, ſo daß, wenn F in der urſprünglichen Form von φ die Bedeutung von f hat, dieſes Symbol F in der geänderten Form von φ nicht die Bedeutung von d, oder gar die von log., sin, ꝛc. hat, ſondern die von f behält. —

müſſen, damit wenigſtens innerhalb gewiſſer Grenzen eine ſtetige Aenderung der independenten Veränderlichen eine ſtetige Aenderung der Functionen derſelben zur Folge hat — ebenſo iſt es für die Probleme der Variationsrechnung weſentlich erforderlich: daß die Aenderungen der betrachteten Größen unendlich klein ſind, d. h. die Aenderungen nach dem Geſetze der Stetigkeit erfolgen. — Wenn alſo $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots)$ eine primitive Function und $u' = \varphi'(x_1, x_2, \ldots)$ dieſelbe Function nach der erforderlichen Formänderung bezeichnet; ſo muß $u' - u = \varphi'(x_1, x_2, \ldots) - \varphi(x_1, x_2, \ldots)$ für alle zuläſſigen Werthe von x_1, $x_2 \ldots$ unendlich klein ſein. Man kann alſo ſetzen:

$$u' - u = i\psi(x_1, x_2, \ldots), \qquad (\alpha)$$

wo i ein unendlich kleiner Factor und $\psi(x_1, x_2, \ldots)$ eine Function iſt, welche weiter keiner Bedingung unterliegt, als der: daß ſie für keine nach den Bedingungen der Aufgabe zuläſſigen Werthe von $x_1, x_2, \ldots$ unendlich wird. — Eine ſolche unendlich kleine Aenderung wie (α) heißt eine Variation im eigentlichen Sinne des Wortes, d. h.: die Variation einer primitiven Function iſt die **unendlich kleine** Aenderung ihres Werthes in Folge einer Aenderung ihrer Form. — Hieraus und aus der vorhergehenden Nr. erhellet unmittelbar: daß die Variation einer primitiven Function ganz willkürlich iſt — und daß die Variation einer derivirten Function von der Variation ihrer primitiven Function abhängt.

5. Es ſei $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots)$ eine unbeſtimmte Function einer beliebigen Anzahl Veränderlicher, und $v = F.u$ eine derivirte Function von u; ſo wird die Variation der letztern offenbar gefunden, wenn man:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots) + i\psi(x_1, x_2, \ldots) \text{ ſtatt } \varphi(x_1, x_2, \ldots)$$

in $v = F.u$ ſetzt, und aus:

$$F\{\varphi(x_1, x_2, \ldots) + i\psi(x_1, x_2, \ldots)\}$$

blos das Glied mit der erſten Potenz des unendlich kleinen Factors i ableitet, welches alsdann die geſuchte unendlich kleine Variation von $v = F.u$ ausdrückt. —*)

*) Der Verfaſſer bemerkt in einer kleinen Note unter dem Texte: es ſei

In der Bestimmung dieser letzten Variation besteht das allgemeinste Problem der Variationsrechnung; allein bei dem gegenwärtigen Zustande der mathematischen Wissenschaften hat man es, insofern es sich um stetige Aenderungen handelt, blos mit zwei Arten derivirter Functionen zu thun, nämlich mit denen, welche durch die Processe des Differenzirens und Integrirens, d. h. mittelst der durch die Symbole d, $\int$ angedeuteten Operationen, erhalten werden. — Es ist daher ganz unnöthig: das Problem der Variationsrechnung in seiner ganzen Allgemeinheit aufzunehmen — und deshalb werden wir uns auf jenen speciellen Fall beschränken, wo F die Bedeutung von d oder $\int$ hat, welcher jedoch allgemein genug ist, um auf alle Probleme anwendbar zu sein, auf welche man die Variationsrechnung bisher angewandt hat. —

Wenn F ein distributives Operationssymbol bedeutet, so ist bekanntlich:

---

wohl zu beachten, daß v hier keine Function von φ oder u sei, weil das Symbol F eine Relation zwischen Formen und nicht zwischen Größen bezeichne. — Dies ist offenbar unrichtig — denn wenn die Aenderung des v auch nur von einer Formänderung des φ oder u herrührt, so ist ein Calcul doch sowohl δu oder $\delta\varphi$, als δv stets als eine Werths- oder Größenänderung zu denken, weil nur von Werths- oder Größenvergleichungen auch in der Variationsrechnung zuletzt die Rede ist — indem es sich ja zuletzt um die Ausmittelung größter, oder kleinster Werthe handelt. Auch wenn F nur die Bedeutung von d oder $\int$ hat, muß doch v immer als eine Größe gedacht werden, deren Werth von dem Werthe von u oder φ abhängt; also eine Function von u oder φ ist. —

Wenn die Variationen, wie später, kurz mit δ angedeutet werden, so ist ganz einfach:

$$\delta v = F(u + \delta u) - F(u)$$

$$= \frac{\delta F(u)}{\delta u}\,\delta u = \frac{dF(u)}{du}\,\delta u,$$

weil δu unendlich klein, und offenbar $\frac{\delta F(u)}{\delta u} = \frac{dF(u)}{du}$ ist, da die allerdings von einer Formänderung herrührende Variation doch stets als eine Werthsänderung in der Rechnung gedacht und behandelt werden muß — und es ganz gleichgültig ist, durch welches Zeichen dieselbe angedeutet wird. — Man hat also in diesem Falle blos wie in der Differentialrechnung zu verfahren.

S.

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F.(\varphi + \varphi_1),$$

wo φ, φ_1 Functionen von beliebig vielen Veränderlichen ſind. —

Setzt man $\varphi + i\psi$ für φ in $v = F.\varphi$, ſo hat man:

$$F(\varphi + i\psi) = F.\varphi + F.i\psi,$$

und folglich iſt die Variation von $F.\varphi$ gleich $F.i\psi$. Nun läßt ſich aber leicht zeigen, daß $F.i\psi = iF.\psi$ iſt. — Denn man hat offenbar:

$$F.2\psi = F(\psi + \psi) = F.\psi + F.\psi = 2.F.\psi,$$

$$F.3\psi = F(2\psi + \psi) = F.2\psi + F.\psi = 3.F.\psi,$$

und allgemein:

$$F.Fi\psi = i.\psi,$$

wo i eine ganze Zahl iſt. — Setzt man nun $i = \frac{1}{n}$, wo n eine ganze Zahl iſt; ſo folgt aus:

$$F.n\psi = nF.\psi,$$

wenn $n\psi$ für ψ geſetzt wird:

$$F.\frac{1}{n}\psi = \frac{1}{n}F.\psi,$$

und dieſe letzte Gleichung findet ſtatt, wie groß n auch ſein mag, alſo auch für $n = \infty$; d. h. man hat:

$$F.i\psi = iF.\psi,$$

wo i unendlich klein iſt. — Die Variation von $F.\varphi$ iſt alſo ſowohl $= iF.\psi$, als $= F.i\psi$. — Offenbar genügen die beiden Operationsſymbole $d, \int$ der Bedingungsgleichung:

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F(\varphi + \varphi_1).$$

6. Wir haben bis dahin blos die eigentlichen Variationen, d. h. die, welche von den Formänderungen der primitiven Functionen herrühren, beſtimmt. Wir werden ſpäter aber auch Aufgaben zu löſen haben, wobei auch die Variationen von Functionen in Betracht gezogen werden müſſen, welche von Werthsänderungen einer, oder mehrerer der independenten Veränderlichen herrühren. —

Um nun die vollständige (totale) Variation einer abhängigen Function zu erhalten, d. h. die Variation, welche sowohl von Formänderungen primitiver Functionen, als von Werthsänderungen independenter Veränderlicher herrührt, muß man sich des folgenden Grundsatzes erinnern:

Wenn eine Größe durch mehrere Ursachen, einzeln betrachtet, Aenderungen erleidet, die gegen sie selbst alle unendlich klein sind; so ist die Gesammtänderung, welche aus allen diesen Ursachen vereinigt resultirt, gleich der Summe der einzelnen unendlich kleinen Aenderungen. —

Dieser Satz ist dem über die Superposition kleiner Bewegungen in der Mechanik analog, und läßt sich auch auf ähnliche Weise darthun. —*)

Da die in der Variationsrechnung vorkommenden Aenderungen von zwei wesentlich verschiedenen Arten sind, so wird es, ehe wir weiter gehen, nicht unzweckmäßig sein, schon jetzt eine scharf unterscheidende Bezeichnung derselben einzuführen. —

1, Die eigentlichen Variationen, d. h. die, welche allein von Formänderungen von Functionen herrühren, sollen mit dem Symbole δ bezeichnet werden — 2, die blos von Werthsänderungen der independenten Veränderlichen herrührenden, wie in der Differentialrechnung, mit d — und endlich 3, die Totalvariationen, welche von den beiden ebengenannten Ursachen zugleich herrühren, mit dem Symbole D. —

Wenn also u eine bestimmte Function veränderlicher Größen ist, so ist:

$$Du = du;$$

ist u eine unbestimmte Function constanter Größen, so ist:

$$Du = \delta u;$$

---

*) Der Grund der Wahrheit dieses Satzes liegt darin: daß die Aenderungen, welche jede dieser Ursachen in den von den andern Ursachen herrührenden unendlich kleinen Aenderungen bewirken, unendlich kleine Größen höherer Ordnungen sind, welche gegen die von den einzelnen Ursachen herrührenden unendlich kleinen Aenderungen erster Ordnung nicht in Betracht kommen. —

und wenn endlich u eine unbestimmte Function veränderlicher Größen ist; so ist:

$$Du = \delta u + du.$$

Da eine independente Veränderliche nur eine Art von Incrementen annehmen kann, so ist es gleichgültig, was für ein Symbol zur Bezeichnung derselben angewandt wird; wir werden jedoch im Allgemeinen das Zeichen d gebrauchen, und wenn es nöthig sein wird, diese Bezeichnung zu ändern; so wird solches speciell und genau angegeben werden, so daß kein Mißverständniß entstehen kann. —

7. Wir wollen das Vorhergehende nun auf die Bestimmung der Variationen der verschiedenen vorkommenden Arten von Größen anwenden. —

(1.) Es sei:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$$

eine bestimmte Function einer beliebigen Anzahl n independenter Veränderlicher, so hat man, da sich die Form der Function nicht ändert:

$$Du = du = \frac{du}{dx_1} . dx_1 + \frac{du}{dx_2} . dx_2 + \&c. + \frac{du}{dx_n} . dx_n .$$

(2.) Es sei:

$$u = \varphi(x_1\, x_2 \ldots . x_n),$$

eine unbestimmte primitive Function, so ist:

$$Du = \delta u + du;$$

aber:

$$du = \frac{du}{dx_1} . dx_1 + \&c. + \frac{du}{dx_n} . dx_n ,$$

und:

$$\delta u = i\psi(x_1, x_2 \ldots x_n);$$

folglich:

$$Du = \frac{du}{dx_1} . dx_1 + \frac{du}{dx_2} . dx_2 + \&c. + \frac{du}{dx_n} . dx_n + i\psi(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

(3.) Es ſei:

$$u = F \,.\, \varphi\,(x_1,\, x_3, \ldots x_n);$$

ſo iſt offenbar:

$$Du = \frac{du}{dx_1} \,.\, dx_1 + \frac{du}{dx_2} \,.\, dx_2 + \&c. + \frac{du}{dx_n} \,.\, dx_n + \delta u,$$

wo δu nach dem in Nr. 5 angegebenen Verfahren zu beſtimmen iſt.

(4.) Es ſei:

$$u = F \,.\, \varphi\,(x_1, x_2 \ldots . x_n)$$

eine derivirte Function, welche der Bedingung:

$$F \,.\, \varphi + F \,.\, \varphi_1 = F \,.\, (\varphi + \varphi_1);$$

genügt; ſo iſt nach Nr. 5:

$$\delta u = F \,.\, i\psi = F \,.\, \delta\varphi,$$

$$Du = \frac{du}{dx_1} \,.\, dx_1 + \frac{du}{dx_2} \,.\, dx_2 + \&c. + \frac{du}{dx_n} \,.\, dx_n + F \,.\, \delta\varphi \,.$$

(5.) Es ſei:

$$V = f\,(x_1, x_2, \ldots . u_1, u_2 \ldots .),$$

eine beſtimmte Function der independenten Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots$ und der unbeſtimmten Functionen $u_1, u_2, \ldots$ einiger, oder aller dieſer Independenten, und es werde die Totalvariation DV von V geſucht. — In dieſem Falle kann V offenbar variiren, ſowohl in Folge der Werthsänderung einer, oder mehrerer der Independenten $x_1, x_2, \ldots$, als in Folge einer Formänderung einer, oder mehrerer der Functionen $u_1, u_2, \ldots$

Wenn ſich z. B. x_1 ändert, während alle übrigen Größen ungeändert bleiben; ſo iſt die entſprechende Aenderung von V offenbar:

$$\left(\frac{dV}{dx_1} + \frac{dV}{du_1} \cdot \frac{du_1}{dx_1} + \frac{dV}{du_2} \cdot \frac{du_2}{dx_1} + \&c.\right) . dx_1 .$$

Ebenſo in Bezug auf x_2:

$$\left(\frac{dV}{dx_2} + \frac{dV}{du_1} \cdot \frac{du_1}{dx_2} + \frac{dV}{du_2} \cdot \frac{du_2}{dx_2} + \&c.\right) dx_2,$$

und ſ. f. für die übrigen Independenten. —

Aendert ſich weiter die Form der Function u_1, während alle andern Größen constant bleiben; ſo iſt die entſprechende Aenderung von V als einer Function von u_1 offenbar:

$$\frac{\delta V}{\delta u_1}\delta u_1 = \frac{dV}{du_1}.\delta u_1\,;$$

weil $\frac{\delta V}{\delta u_1} = \frac{dV}{du_1}$ iſt, und ähnliche Glieder werden durch die Formänderungen von u_2, u_3, ... eingeführt, ſo daß die Totalvariation iſt:

$$\begin{aligned} D.V = &\left(\frac{dV}{dx_1} + \frac{dV}{du_1}.\frac{du_1}{dx_1} + \frac{dV}{du_2}.\frac{du_2}{dx_1} + \&c.\right) dx_1, \\ &+\left(\frac{dV}{dx_2} + \&c. \qquad\qquad\qquad\qquad\right) dx_2, \\ &+ \&c. \\ &+ \frac{dV}{du_1}.\delta u_1 + \frac{dV}{du_2}.\delta u_2 + \&c. \end{aligned}$$

während die eigentliche Variation ausgedrückt wird durch:

$$\delta V = \frac{dV}{du_1}\delta u_1 + \frac{dV}{du_2}\delta u_2 + \&c.$$

(6.) Endlich werde die Variation DU von $U = F.V$ geſucht, wo:

$$V = f(x_1, x_2 \ldots . u_1, u_2 \ldots .),$$

und F ein Operationsſymbol iſt, welches der Bedingung:

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F(\varphi + \varphi_1)$$

genügt.

Wir wollen wieder wie vorhin verfahren, indem wir ſucceſſive die einzelnen Variationen beſtimmen, welche aus den Aenderungen der verſchiedenen in U enthaltenen veränderlichen Elemente entſpringen. — Da V eine beſtimmte Function von $x_1, x_2, \ldots .$ und $u_1, u_2, \ldots .$ iſt, ſo iſt klar, daß V, ſo lange die Formen der Functionen $u_1, u_2 \ldots$ ungeändert bleiben, auch eine beſtimmte Function der Independenten $x_1, x_2, \ldots .$ iſt, und da F eine beſtimmte Operation andeutet; ſo iſt auch U eine beſtimmte Function von $x_1, x_2, \ldots$ Wenn

ſich alſo x_1 allein ändert, während alle übrigen in U enthaltenen Elemente conſtant bleiben; ſo iſt die entſprechende Aenderung von U offenbar:

$$\frac{dU}{dx_1} \cdot dx_1,$$

wo $\frac{dU}{dx_1}$ den vollſtändigen Differentialquotienten von U nach x_1 bedeutet — und ähnliche Glieder werden durch die Aenderung von $x_2, x_3, \ldots$ eingeführt. — Es bleibt alſo blos noch übrig, die eigentliche Variation zu finden, d. h. die, welche von der Formänderung der Functionen $u_1, u_2, \ldots$ herrührt. — Beim erſten Anblick könnte es ſcheinen, daß die von irgend einer Aenderung von u_1 herrührende Aenderung in U wieder durch:

$$\frac{dU}{du_1} \cdot \delta u_1 .$$

ausgedrückt werde, was richtig wäre, wenn U eine Function von u_1 in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. eine Größe wäre, deren Werth von dem Werthe von u_1 abhängt. Die Beziehung zwiſchen U und u_1 iſt aber blos eine der Form und nicht der Größe (des Werthes), und man kann deshalb nicht mehr behaupten: daß die der Aenderung von u_1 entſprechende Aenderung von U durch:

$$\frac{dU}{du_1} \cdot \delta u_1$$

ausgedrückt wird. — Obgleich aber U keine Function im gewöhnlichen Sinne von u_1 iſt, ſo iſt U doch eine von u_1 derivirte oder abhängige Function von u_1; denn die Form von U iſt offenbar abhängig von der von V, welche ſelbſt von der von u_1 abhängt. Wegen $U = F.V$ iſt nach Nr. 5 aber $\delta U = F.\delta V$, und nach (5) iſt:

$$\delta V = \frac{dV}{du_1} \delta u_1 + \frac{dV}{du_2} \delta u_2 + \&c.,$$

mithin wird der von der Formänderung von u_1 herrührende Theil von δU ausgedrückt durch:

$$F.\frac{dV}{du_1} \delta u_1,$$

und endlich die Totalvariation von U durch:

$$\left.\begin{aligned} DU = \frac{dU}{dx_1}.dx_1 + \frac{dU}{dx_2}.dx_2 + \&c. \\ + F.\left(\frac{dV}{du_1}\delta u_1 + \frac{dV}{du_2}\delta u_2 + \&c.\right) \end{aligned}\right\} (A)$$

Aus dieſem Falle ſieht man: daß man bei Anwendung der Regeln der Differentialrechnung auf Fälle, wo die betrachtete Variation von Formänderungen von Functionen herrührt, vorſichtig ſein muß. —*)

*) Auch hier iſt U als eine Function von $u_1, u_2, \ldots$ zu betrachten, weil der Werth von U von den Werthen von $u_1, u_2, \ldots$ abhängt — und dieſe letzten Werthe von den Formen von $u_1, u_2, \ldots$ dependiren, ſo daß ſich alſo der Werth von U ändert, wenn ſich auch nur die Formen von $u_1, u_2, \ldots$ ändern. — Es iſt deshalb allerdings die von δu_1 herrührende Aenderung des U:

$$= \frac{\delta U}{\delta u_1}\delta u_1 = \frac{dU}{du_1}\delta u_1 , \qquad (\alpha)$$

und ebenſo in Beziehung auf $u_2, \ldots$, weil $u_1, u_2, \ldots$ hier ganz dieſelbe Rolle ſpielen, wie die independenten Veränderlichen in der Differentialrechnung, und das Zeichen δ blos zur Unterſcheidung der von Formänderungen herrührenden Werthsänderungen dient. — In der That iſt:

$$F.\frac{dV}{du_1}\delta u_1$$

weiter nichts, als der nach der Regel:

$$\delta U = \delta F.V = F.\delta V \qquad (\beta)$$

transformirte Ausdruck von (α). —

Wenn alſo:

$$U = F.(f(x_1.x_2, \ldots u_1, u_2, \ldots))$$

iſt, und die Totalvariation DU geſucht wird; ſo hat man zunächſt nach $x_1, x_2, \ldots$ zu differenziren, indem auch $u_1, u_2, \ldots$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots$ in Betracht gezogen werden — und dann noch nach $u_1, u_2, \ldots$, indem dieſe Functionen blos als einfache independente Veränderliche behandelt und ihre unendlich kleinen Variationen zur Unterſcheidung mit $\delta u_1, \delta u_2, \ldots$ bezeichnet werden, weil ſie von Formänderungen herrühren;

8. Nachdem wir so die allgemeinen Fundamentalsätze der Variationsrechnung aufgestellt haben, gehen wir zunächst zu den verschiedenen Fällen über, auf welche jene Sätze bei dem gegenwärtigen Stande der mathematischen und physikalischen Wissenschaften angewandt werden können — nämlich zu den Fällen, wo die Functionen durch die Processe der Differentiation und Integration auseinander hergeleitet worden. —

---

aber im Calcul dennoch stets als unendlich kleine Werthsänderungen gedacht werden müssen — und endlich sind die Ausdrücke von:

$$\frac{\delta U}{\delta u_1}\delta u_1\,,\quad \frac{\delta U}{\delta u_2}\delta u_2\,,\ldots$$

noch nach der Regel (β) zu transformiren. — Man braucht also nur ganz einfach den Regeln der Differentialrechnung in den betreffenden Fällen zu folgen, indem man die primitiven oder independenten Functionen einmal als Functionen der in ihnen vorkommenden independenten Veränderlichen und dann selbst blos als unabhängige Veränderliche behandelt, im letzten Falle aber ihre unendlich kleinen Variationen mit δ bezeichnet — und endlich nach der Regel (β) transformirt. —

Auch erhellet aus (A) die Wahrheit des Grundsatzes in Nr. 6 sehr deutlich; denn die in jedem Gliede von (A) durch die übrigen Ursachen bewirkten Aenderungen sind offenbar unendlich kleine Größen höherer Ordnungen, die gegen diese Glieder selbst, welche von der ersten Ordnung sind, nicht in Betracht kommen. — S.

Zweites Kapitel.

Variation der Functionen einer Independenten

Aufgabe I.

9. Man ſoll die Totalvariation des Differentialquotienten $\frac{y}{x^n}$ finden, wenn y blos eine Function einer Independenten x iſt.

Auflöſung. Offenbar kann ſich ein ſolcher Ausdruck nur auf vierlei Weiſe ändern — nämlich in Folge einer Werthsände- rung der Independenten x, und einer Formänderung der Function y. Die Totalvariation wird alſo nach Kap. 1 Nr. 6 durch die Summe der von dieſen beiden Urſachen herrührenden einzelnen Aenderungen ausgedrückt. — Wenn ſich aber die Independente x um dx än- dert, indem die Form der Function y ungeändert bleibt; ſo iſt die entſprechende Aenderung von $\frac{d^n y}{dx^n}$ offenbar $= \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} . dx$. Die Totalvariation von $\frac{d^n y}{dx^n}$ wird alſo nach der Bezeichnung in Nr. 3 ausgedrückt durch:

$$D . \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} . dx + \delta . \frac{d^n y}{dx^n} . \qquad (\alpha)$$

Da aber das Operationsſymbol $\frac{d^n}{dx^n}$ der Gleichung:

$$F . \varphi + F . \varphi_1 = F . (\varphi + \varphi_1),$$

genügt, ſo iſt offenbar:

$$\delta . \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n . \delta y}{dx^n},$$

und wenn dieſer Werth in (α) ſubſtituirt wird; ſo ergibt ſich endlich:

$$D \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \cdot dx + \frac{d^n \cdot \delta y}{dx^n}.$$

Anmerkung. Wir haben in Nr. 4 hinsichtlich der Variation $\delta u = i\psi(x_1, x_2 \ldots)$ die ausdrückliche Bedingung gemacht: daß die Function ψ für keinen mit den Bedingungen der betreffenden Aufgabe verträglichen Werth der Independenten $x_1, x_2, \ldots$ unendlich wird, was genügt, so lange man es blos mit der Function selbst zu thun hat. — Wenn aber auch abgeleitete Functionen der ursprünglichen Function in Betracht gezogen werden müssen, so müssen auch die ähnlich abgeleiteten Functionen von ψ für alle zulässigen Werthe der Independenten endlich bleiben. — Wenn also in (4) in Nr. 7 vorausgesetzt ist, daß in:

$$\delta \cdot F \cdot \varphi = F \cdot i\psi = iF \cdot \psi,$$

die Function $F \cdot \psi$ für keinen mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werth der Independenten $x_1, x_2, \ldots$ unendlich wird; so muß in dem gegenwärtigen Falle, wo blos eine Independente x vorkommt, in:

$$\delta y = i\psi x, \delta \frac{d^n y}{dx^n} = i \frac{d^n \cdot \psi x}{dx^n}$$

die Function ψ von einer solchen Form angenommen werden: daß $\frac{d^n \cdot \psi x}{dx^n}$ für alle zulässigen Werthe von x endlich bleibt — welche Bemerkung namentlich bei den Anwendungen der Variationsrechnung auf die Theorie der Maxima und Minima von hoher Wichtigkeit ist. —

Aufgabe II.

10. Man soll die Totalvariation $D \cdot V$ von:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

finden, wo f also eine bestimmte Function von x, y und den n ersten Differentialquotienten von y ist. —

Auflösung. Dieser Fall gehört offenbar unter (5) in Nr. 7, und die Auflösung ergibt sich sofort, wenn man die Independenten

auf eine reducirt, und $u_1 = y$, $u_2 = \frac{dy}{dx}$, ... ſetzt. — Wird ferner zur Abkürzung geſetzt:

$$M = \frac{dV}{dx},\ N = \frac{dV}{dy},\ P_1 = \frac{dV}{d.\frac{dy}{dx}},\ P_2 = \frac{dV}{d.\frac{d^2y}{dx^2}},\ \text{&c.}\ P_n = \frac{dV}{d.\frac{d^n y}{dx^n}},$$

und ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$D.V = \left(M + N\frac{dy}{dx} + P_1\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\frac{d^{n+1}.y}{dx^{n+1}}\right)dx$$

$$+ N\delta y + P_1\delta.\frac{dy}{dx} + P_2\delta.\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\delta.\frac{d^n y}{dx^n};$$

oder wenn für:

$$\delta.\frac{dy}{dx}, \delta.\frac{d^2y}{dx^2}, ... \delta.\frac{d^n y}{dx^n},$$

ihre nach der vorhergehenden Nr. beſtimmten Werthe geſetzt werden:

$$D.V = \left(M + N\frac{dy}{dx} + P_1\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)dx$$

$$+ N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2.\delta y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\frac{d^n\delta y}{dx^n},$$

wo in der Variation $\delta y = i\psi x$ nach der Anmerkung in Nr. 9 die Function ψx von ſolcher Form angenommen werden muß: daß weder ſie ſelbſt, noch irgend einer ihrer n erſten Differentialquotienten für irgend einen mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werth von x unendlich wird. —

Aufgabe III.

11. Man ſoll die Totalvariation von:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx, \text{ wo } V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ... \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

iſt, finden. —

(3.) Es ſei:

$$u = F.\varphi(x_1, x_3, \ldots x_n);$$

ſo iſt offenbar:

$$Du = \frac{du}{dx_1}.dx_1 + \frac{du}{dx_2}.dx_2 + \&c. + \frac{du}{dx_n}.dx_n + \delta u,$$

wo δu nach dem in Nr. 5 angegebenen Verfahren zu beſtimmen iſt.

(4.) Es ſei:

$$u = F.\varphi(x_1, x_2 \ldots . x_n)$$

eine derivirte Function, welche der Bedingung:

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F.(\varphi + \varphi_1);$$

genügt; ſo iſt nach Nr. 5:

$$\delta u = F.i\psi = F.\delta\varphi,$$

$$Du = \frac{du}{dx_1}.dx_1 + \frac{du}{dx_2}.dx_2 + \&c. + \frac{du}{dx_n}.dx_n + F.\delta\varphi.$$

(5.) Es ſei:

$$V = f(x_1, x_2, \ldots . u_1, u_2 \ldots .),$$

eine beſtimmte Function der independenten Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots$ und der unbeſtimmten Functionen $u_1, u_2, \ldots$ einiger, oder aller dieſer Independenten, und es werde die Totalvariation DV von V geſucht. — In dieſem Falle kann V offenbar variiren, ſowohl in Folge der Werthsänderung einer, oder mehrerer der Independenten $x_1, x_2, \ldots$, als in Folge einer Formänderung einer, oder mehrerer der Functionen $u_1, u_2, \ldots$

Wenn ſich z. B. x_1 ändert, während alle übrigen Größen ungeändert bleiben; ſo iſt die entſprechende Aenderung von V offenbar:

$$\left(\frac{dV}{dx_1} + \frac{dV}{du_1}.\frac{du_1}{dx_1} + \frac{dV}{du_2}.\frac{du_2}{dx_1} + \&c.\right).dx_1.$$

Ebenſo in Bezug auf x_2:

$$\left(\frac{dV}{dx_2} + \frac{dV}{du_1}.\frac{du_1}{dx_2} + \frac{dV}{du_2}.\frac{du_2}{dx_2} + \&c.\right)dx_2,$$

und ſ. f. für die übrigen Independenten. —

Aendert sich weiter die Form der Function u_1, während alle andern Größen constant bleiben; so ist die entsprechende Aenderung von V als einer Function von u_1 offenbar:

$$\frac{\delta V}{\delta u_1}\delta u_1 = \frac{dV}{du_1}.\delta u_1\ ;$$

weil $\frac{\delta V}{\delta u_1} = \frac{dV}{du_1}$ ist, und ähnliche Glieder werden durch die Formänderungen von u_2, u_3, ... eingeführt, so daß die Totalvariation ist:

$$\begin{aligned} D.V = &\left(\frac{dV}{dx_1} + \frac{dV}{du_1}.\frac{du_1}{dx_1} + \frac{dV}{du_2}.\frac{du_2}{dx_1} + \&c.\right) dx_1, \\ &+\left(\frac{dV}{dx_2} + \&c. \qquad\qquad\qquad\quad\right) dx_2, \\ &+ \&c. \\ &+ \frac{dV}{du_1}.\delta u_1 + \frac{dV}{du_2}.\delta u_2 + \&c. \end{aligned}$$

während die eigentliche Variation ausgedrückt wird durch:

$$\delta V = \frac{dV}{du_1}\delta u_1 + \frac{dV}{du_2}\delta u_2 + \&c.$$

(6.) Endlich werde die Variation DU von $U = F.V$ gesucht, wo:

$$V = f(x_1, x_2 \ldots . u_1, u_2 \ldots .),$$

und F ein Operationssymbol ist, welches der Bedingung:

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F(\varphi + \varphi_1)$$

genügt.

Wir wollen wieder wie vorhin verfahren, indem wir successive die einzelnen Variationen bestimmen, welche aus den Aenderungen der verschiedenen in U enthaltenen veränderlichen Elemente entspringen. — Da V eine bestimmte Function von $x_1, x_2, \ldots .$ und $u_1, u_2, \ldots .$ ist, so ist klar, daß V, so lange die Formen der Functionen $u_1, u_2 \ldots$ ungeändert bleiben, auch eine bestimmte Function der Independenten $x_1, x_2, \ldots .$ ist, und da F eine bestimmte Operation andeutet; so ist auch U eine bestimmte Function von $x_1, x_2, \ldots$ Wenn

sich also x_1 allein ändert, während alle übrigen in U enthaltenen Elemente constant bleiben; so ist die entsprechende Aenderung von U offenbar:

$$\frac{dU}{dx_1} \cdot dx_1,$$

wo $\frac{dU}{dx_1}$ den vollständigen Differentialquotienten von U nach x_1 bedeutet — und ähnliche Glieder werden durch die Aenderung von $x_2, x_3, \ldots$ eingeführt. — Es bleibt also blos noch übrig, die eigentliche Variation zu finden, d. h. die, welche von der Formänderung der Functionen $u_1, u_2, \ldots$ herrührt. — Beim ersten Anblick könnte es scheinen, daß die von irgend einer Aenderung von u_1 herrührende Aenderung in U wieder durch:

$$\frac{dU}{du_1} \cdot \delta u_1 .$$

ausgedrückt werde, was richtig wäre, wenn U eine Function von u_1 in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. eine Größe wäre, deren Werth von dem Werthe von u_1 abhängt. Die Beziehung zwischen U und u_1 ist aber blos eine der Form und nicht der Größe (des Werthes), und man kann deshalb nicht mehr behaupten: daß die der Aenderung von u_1 entsprechende Aenderung von U durch:

$$\frac{dU}{du_1} \cdot \delta u_1$$

ausgedrückt wird. — Obgleich aber U keine Function im gewöhnlichen Sinne von u_1 ist, so ist U doch eine von u_1 derivirte oder abhängige Function von u_1; denn die Form von U ist offenbar abhängig von der von V, welche selbst von der von u_1 abhängt. Wegen $U = F \cdot V$ ist nach Nr. 5 aber $\delta U = F \cdot \delta V$, und nach (5) ist:

$$\delta V = \frac{dV}{du_1} \delta u_1 + \frac{dV}{du_2} \delta u_2 + \&c.,$$

mithin wird der von der Formänderung von u_1 herrührende Theil von δU ausgedrückt durch:

$$F \cdot \frac{dV}{du_1} \delta u_1,$$

und endlich die Totalvariation von U durch:

$$\left.\begin{aligned} DU &= \frac{dU}{dx_1}.dx_1 + \frac{dU}{dx_2}.dx_2 + \&c. \\ &+ F.\left(\frac{dV}{du_1}\delta u_1 + \frac{dV}{du_2}\delta u_2 + \&c.\right) \end{aligned}\right\} (A)$$

Aus diesem Falle sieht man: daß man bei Anwendung der Regeln der Differentialrechnung auf Fälle, wo die betrachtete Variation von Formänderungen von Functionen herrührt, vorsichtig sein muß. —*)

---

*) Auch hier ist U als eine Function von $u_1, u_2, \ldots$ zu betrachten, weil der Werth von U von den Werthen von $u_1, u_2, \ldots$ abhängt — und diese letzten Werthe von den Formen von $u_1, u_2, \ldots$ dependiren, so daß sich also der Werth von U ändert, wenn sich auch nur die Formen von $u_1, u_2, \ldots$ ändern. — Es ist deshalb allerdings die von δu_1 herrührende Aenderung des U:

$$= \frac{\delta U}{\delta u_1}\delta u_1 = \frac{dU}{du_1}\delta u_1, \qquad (\alpha)$$

und ebenso in Beziehung auf $u_2, \ldots$, weil $u_1, u_2, \ldots$ hier ganz dieselbe Rolle spielen, wie die unabhängigen Veränderlichen in der Differentialrechnung, und das Zeichen δ blos zur Unterscheidung der von Formänderungen herrührenden Werthsänderungen dient. — In der That ist:

$$F.\frac{dV}{du_1}\delta u_1$$

weiter nichts, als der nach der Regel:

$$\delta U = \delta F.V = F.\delta V \qquad (\beta)$$

transformirte Ausdruck von (α). —

Wenn also:

$$U = F.(f(x_1.x_2, \ldots u_1, u_2, \ldots))$$

ist, und die Totalvariation DU gesucht wird; so hat man zunächst nach x_1, $x_2, \ldots$ zu differenziren, indem auch $u_1, u_2, \ldots$ als Functionen von x_1, $x_2, \ldots$ in Betracht gezogen werden — und dann noch nach $u_1, u_2, \ldots$, indem diese Functionen blos als einfache independente Veränderliche behandelt und ihre unendlich kleinen Variationen zur Unterscheidung mit $\delta u_1, \delta u_2, \ldots$ bezeichnet werden, weil sie von Formänderungen herrühren;

8. Nachdem wir so die allgemeinen Fundamentalsätze der Variationsrechnung aufgestellt haben, gehen wir zunächst zu den verschiedenen Fällen über, auf welche jene Sätze bei dem gegenwärtigen Stande der mathematischen und physikalischen Wissenschaften angewandt werden können — nämlich zu den Fällen, wo die Functionen durch die Processe der Differentiation und Integration auseinander hergeleitet worden. —

---

aber im Calcul dennoch stets als unendlich kleine Werthsänderungen gedacht werden müssen — und endlich sind die Ausdrücke von:

$$\frac{\delta U}{\delta u_1}\delta u_1\,,\quad \frac{\delta U}{\delta u_2}\delta u_2\,,\ldots$$

noch nach der Regel (β) zu transformiren. — Man braucht also nur ganz einfach den Regeln der Differentialrechnung in den betreffenden Fällen zu folgen, indem man die primitiven oder independenten Functionen einmal als Functionen der in ihnen vorkommenden independenten Veränderlichen und dann selbst blos als unabhängige Veränderliche behandelt, im letzten Falle aber ihre unendlich kleinen Variationen mit δ bezeichnet — und endlich nach der Regel (β) transformirt. —

Auch erhellet aus (A) die Wahrheit des Grundsatzes in Nr. 6 sehr deutlich; denn die in jedem Gliede von (A) durch die übrigen Ursachen bewirkten Aenderungen sind offenbar unendlich kleine Größen höherer Ordnungen, die gegen diese Glieder selbst, welche von der ersten Ordnung sind, nicht in Betracht kommen. — S.

Zweites Kapitel.

Variation der Functionen einer Independenten

Aufgabe I.

9. Man ſoll die Totalvariation des Differentialquotienten $\frac{d^n y}{dx^n}$ finden, wenn y blos eine Function einer Independenten x iſt.

Auflöſung. Offenbar kann ſich ein ſolcher Ausdruck nur auf zweierlei Weiſe ändern — nämlich in Folge einer Werthsänderung der Independenten x, und einer Formänderung der Function y. Die Totalvariation wird alſo nach Kap. 1 Nr. 6 durch die Summe der von dieſen beiden Urſachen herrührenden einzelnen Aenderungen ausgedrückt. — Wenn ſich aber die Independente x um dx ändert, indem die Form der Function y ungeändert bleibt; ſo iſt die entſprechende Aenderung von $\frac{d^n y}{dx^n}$ offenbar $= \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} . dx$. Die Totalvariation von $\frac{d^n y}{dx^n}$ wird alſo nach der Bezeichnung in Nr. 6 ausgedrückt durch:

$$D . \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} . dx + \delta . \frac{d^n y}{dx^n} . \qquad (\alpha)$$

Da aber das Operationsſymbol $\frac{d^n}{dx^n}$ der Gleichung:

$$F . \varphi + F . \varphi_1 = F . (\varphi + \varphi_1),$$

genügt, ſo iſt offenbar:

$$\delta . \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n . \delta y}{dx^n},$$

und wenn dieſer Werth in (α) ſubſtituirt wird; ſo ergibt ſich endlich:

$$D \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \cdot dx + \frac{d^n \cdot \delta y}{dx^n}.$$

Anmerkung. Wir haben in Nr. 4 hinsichtlich der Variation $\delta u = i\psi(x_1, x_2 \ldots)$ die ausdrückliche Bedingung gemacht: daß die Function ψ für keinen mit den Bedingungen der betreffenden Aufgabe verträglichen Werth der Independenten $x_1, x_2, \ldots$ unendlich wird, was genügt, so lange man es blos mit der Function selbst zu thun hat. — Wenn aber auch abgeleitete Functionen der ursprünglichen Function in Betracht gezogen werden müssen, so müssen auch die ähnlich abgeleiteten Functionen von ψ für alle zulässigen Werthe der Independenten endlich bleiben. — Wenn also in (4) in Nr. 7 vorausgesetzt ist, daß in:

$$\delta \cdot F \cdot \varphi = F \cdot i\psi = iF \cdot \psi,$$

die Function $F \cdot \psi$ für keinen mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werth der Independenten $x_1, x_2, \ldots$ unendlich wird; so muß in dem gegenwärtigen Falle, wo blos eine Independente x vorkommt, in:

$$\delta y = i\psi x, \delta \frac{d^n y}{dx^n} = i \frac{d^n \cdot \psi x}{dx^n}$$

die Function ψ von einer solchen Form angenommen werden: daß $\frac{d^n \cdot \psi x}{dx^n}$ für alle zulässigen Werthe von x endlich bleibt — welche Bemerkung namentlich bei den Anwendungen der Variationsrechnung auf die Theorie der Maxima und Minima von hoher Wichtigkeit ist. —

Aufgabe II.

10. Man soll die Totalvariation $D \cdot V$ von:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

finden, wo f also eine bestimmte Function von x, y und den n ersten Differentialquotienten von y ist. —

Auflösung. Dieser Fall gehört offenbar unter (5) in Nr. 7, und die Auflösung ergibt sich sofort, wenn man die Independenten

auf eine reducirt, und $u_1 = y$, $u_2 = \frac{dy}{dx}$, ... ſetzt. — Wird ferner zur Abkürzung geſetzt:

$$M = \frac{dV}{dx},\ N = \frac{dV}{dy},\ P_1 = \frac{dV}{d.\frac{dy}{dx}},\ P_2 = \frac{dV}{d.\frac{d^2y}{dx^2}},\ \text{&c.}\ P_n = \frac{dV}{d.\frac{d^n y}{dx^n}},$$

und ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$D.V = \left(M + N\frac{dy}{dx} + P_1\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\frac{d^{n+1}.y}{dx^{n+1}}\right)dx$$

$$+ N\delta y + P_1\delta.\frac{dy}{dx} + P_2\delta.\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\delta.\frac{d^n y}{dx^n};$$

oder wenn für:

$$\delta.\frac{dy}{dx}, \delta.\frac{d^2y}{dx^2}, ... \delta.\frac{d^n y}{dx^n},$$

ihre nach der vorhergehenden Nr. beſtimmten Werthe geſetzt werden:

$$D.V = \left(M + N\frac{dy}{dx} + P_1\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)dx$$

$$+ N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2.\delta y}{dx^2} + \text{&c.} + P_n\frac{d^n\delta y}{dx^n},$$

wo in der Variation $\delta y = i\psi x$ nach der Anmerkung in Nr. 9 die Function ψx von ſolcher Form angenommen werden muß: daß weder ſie ſelbſt, noch irgend einer ihrer n erſten Differentialquotienten für irgend einen mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werth von x unendlich wird. —

Aufgabe III.

11. Man ſoll die Totalvariation von:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx, \text{ wo } V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ... \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

iſt, finden. —

Auflöſung. Der Werth eines beſtimmten Integrales kann ſich auf drei verſchiedene Arten ändern — nämlich: 1, in Folge einer Aenderung der obern Grenze x_1 — 2, in Folge einer ſolchen der untern Grenze x_0 — und 3, in Folge einer Formänderung der zu integrirenden Function. —*) Die Totalvariation iſt wieder die Summe der Partialvariationen. — Es ſei V_1 der Werth von V an der obern Grenze, und dx_1 das Increment der letztern, indem die Form der Function V ungeändert bleibt; ſo iſt die entſprechende Aenderung von U offenbar $= V_1\,dx_1$. — Ebenſo, wenn die untere Grenze x_0 das Increment dx_0 erhält; ſo iſt das entſprechende Increment von U gleich $-V_0\,dx_0$, wo V_0 den Werth von V an der untern Grenze bezeichnet. — Demnach iſt:

$$D.U = V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \delta . \int_{x_0}^{x_1} V dx ,$$

ſo daß nur noch die von einer Formänderung von V herrührende Partialvariation $\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx$ zu beſtimmen iſt. — Da aber das Operationsſymbol $\int$ der Bedingung:

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F.(\varphi + \varphi_1),$$

genügt, ſo iſt nach Nr. 5 Kap. 1:

$$\delta . \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta V . dx ,$$

und da V eine beſtimmte Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c. iſt; ſo kann ſich die Form von V nur in Folge einer Formänderung

*) Man pflegt bei der Ableitung der Variation eines beſtimmten Integrales auch der Independenten x ein Increment beizulegen; da aber dieſe Größe in dem Endreſultate nicht vorkommt, welches nur von den Werthen der Grenzen und der Form der zu integrirenden Function abhängt; ſo kann offenbar in dem Ausdrucke der Totalvariation kein Glied vorkommen, welches von dem Incremente der Independenten abhängt, das von den Incrementen ihrer Grenzwerthe verſchieden iſt. — Wenn alſo der Independenten doch ein Increment ertheilt wird, ſo muß der Coefficient deſſelben unter den Integralzeichen von ſelbſt verſchwinden.

der Function y ändern. — Der Werth von δV ist also nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$\delta V = N\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \&c. + P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n},$$

und folglich:

$$\delta . \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(N\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \&c. + P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n} \right) dx,$$

welcher Ausdruck durch theilweise Integration wie folgt transformirt werden kann. Es ist offenbar:

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1 \frac{d\delta y}{dx} = (P_1 \delta y)_1 - (P_1 \delta y)_0 . - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dP_1}{dx} . \delta y . dx,$$

wo $(P_1\delta y)_1$, $(P_1\delta y)_0$ resp. die Werthe von $P_1\delta y$ an der obern und untern Grenze bedeuten. —

Ebenso ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \left(P_2 \frac{d\delta y}{dx} \right)_1 - \left(P_2 \frac{d\delta y}{dx} \right)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dP_2}{dx} . \frac{d\delta y}{dx} . dx;$$

oder wenn das letzte Glied weiter integrirt wird:

$$= \left(P_2 \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \delta y \right)_1 - \left(P_2 \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \delta y \right)_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 P_2}{dx^2} \delta y . dx$$

Wenn das Glied:

$$\int_{x_0}^{x_1} P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n} . dx,$$

einer n maligen theilweisen Integration unterzogen wird, so ergibt sich ebenso:

$$\int_{x_0}^{x_1} P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n} = \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} - \frac{dP_n}{dx} . \frac{d^{n-2}\delta y}{dx^{n-2}} + \&c. \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}} . \delta y \right)_1 - \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} - \&c. \right)_0$$

$$+ (-1)^n . \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n P_n}{dx^n} . \delta y .$$

Werden alsdann die Coefficienten von:

$$\delta y_1, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1, \text{ \&c.},$$

vereinigt, so findet man:

$$\delta . \int_{x0}^{x1} V dx = \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2 P_3}{dx^2} - \text{\&c.} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}}\right)_1 \delta y_1$$

$$- \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \text{\&c.}\right)_0 \delta y_0$$

$$+ \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \text{\&c.}\right)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 - \text{\&c.})_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+ \text{\&c.}$$

$$+ \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1 - \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_0$$

$$+ \int_{x0}^{x1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \text{\&c.} + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n}\right) \delta y . dx;$$

und endlich:

$$D . \int_{x0}^{x1} V dx = V_1 dx_1 - V_0 dx_0$$

$$+ \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \text{\&c.}\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \text{\&c.}\right)_0 \delta y_0$$

$$+ (P_2 - \text{\&c.})_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 - \text{\&c.})_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+ \text{\&c.}$$

$$+ \int_{x0}^{x1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \text{\&c.} + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n}\right) \delta y . dx.$$

12. Dieser Ausdruck besteht, wie man sieht, aus drei wesentlich verschiedenen Arten von Gliedern — nämlich: 1, aus den Gliedern:

$$V_1 dx_1 - V_0 dx_0,$$

welche von der Formänderung der Function V ganz unabhängig

ſind, und nur von der Aenderung der Grenzen abhängen; 2, aus den Gliedern:

$$(P_1 - \&c.)_1\, \delta y_1 - \&c.,$$

welche von der Formänderung der Function, aber nicht für jeden Werth von x, ſondern blos für die Grenzwerthe dieſer Independenten, abhängen; und 3, aus den Gliedern unter dem Integralzeichen, nämlich:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. \right) \delta y \,.\, dx,$$

welche von der allgemeinen Formänderung der Function abhängig ſind. — Dieſer weſentliche Unterſchied erhellet am deutlichſten, wenn man ſich erinnert: daß $dy = i\psi x$ iſt. — Denn alsdann ſieht man: 1, daß der Werth der erſten Art von Gliedern von der Form der Function ψx ganz unabhängig iſt; 2, daß es zur Beſtimmung des Werthes der Glieder der zweiten Art nicht nöthig iſt, die Form der Function ψx zu beſtimmen, ſondern blos die Werthe, welche dieſe Function und ihre $n-1$ erſten Differentialquotienten an den Grenzen haben; und 3, daß der Werth des Gliedes:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. \right) \delta y \,.\, dx$$

von der Form der Function ψ abhängig iſt, und nicht beſtimmt werden kann, ſo lange dieſe Form willkürlich bleibt. —

Aufgabe IV.

13. Man ſoll die Totalvariation von $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ finden, wenn:

$$V = f\left\{ x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^n y}{dx^n}, x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdots x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdots \right\}$$

iſt, d. h. die Grenzwerthe beliebig vieler der Größen $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\ldots$ enthält. —

Auflöſung. Da x_1, y_1 und x_0, y_0 durch dieſelbe allgemeine Relation mit einander verbunden ſind, wie x, y; ſo iſt klar: daß ſich

das Integral $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ nur auf die in der vorhergehenden Aufgabe namhaft gemachten drei Weiſen ändern kann. — Wenn nun x_1 das Increment dx_1 bekommt, indem die Form der Function y ungeändert bleibt; ſo iſt der entſprechende Zuwachs des Integrales:

$$\left\{V_1+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dV}{dx_1}+\frac{dV}{dy_1}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_1+\frac{dV}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1+\&c.\right)dx\right\}dx_1.$$

Desgleichen, wenn x_0 das Increment dx_0 erhält, ſo iſt die entſprechende Aenderung des Integrales:

$$\left\{-V_0+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dV}{dx_0}\right)+\frac{dV}{dy_0}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{dV}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\&c.\right)dx\right\}dx_0.$$

Aendert ſich endlich die Form der Function y, indem ſonſt alles ungeändert bleibt; ſo iſt die Aenderung des Integrales offenbar:

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\left(N\delta y+P_1\frac{d\delta y}{dx}+\&c.\right)dx+\delta y_1\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_1}dx+\delta y_0\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_0}dx$$

$$+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}dx+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}dx$$

$$+\&c.$$

Setzt man nun:

$$\mu_1=\frac{dV}{dx_1},\ \nu_1=\frac{dV}{dy_1},\ \pi_1=\frac{dV}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_1},\ \&c.$$

$$\mu_0=\frac{dV}{dx_0},\ \nu_0=\frac{dV}{dy_0},\ \pi_0=\frac{dV}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_0},$$

integrirt wieder theilweiſe, wie früher, und faßt alles zuſammen; ſo erhält man als die verlangte Totalvariation:

$$DU=\left\{V_1+\int_{x_0}^{x_1}\left(\mu_1+\nu_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1+\pi_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1+\&c.\right)dx\right\}dx_1$$

$$+ - \left\{V_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left(\mu_0 + \nu_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \pi_0\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \&c.\right)dx\right\} dx_0$$

$$+ \left\{\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 + \int_{x_0}^{x_1} \nu_1\, dx\right\} \delta y_1$$

$$- \left\{\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \nu_0\, dx\right\} \delta y_0$$

$$+ \left\{(P_2 - \&c.)_1 + \int_{x_0}^{x_1} \pi_1\, dx\right\}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right) - \left\{(P_2 - \&c.)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \pi_0 dx\right\}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+ \&c.$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c.\right)\delta y.$$

Aufgabe V.

14. Die Totalvariation von $U = \int_{x_0}^{x_1} V\, dx$ zu finden, wenn:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^n y}{dx^n},\ z, \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right),$$

ist, und y, z unbestimmte Functionen von x sind. —

Auflösung. Der Werth dieses Integrales kann sich ändern: 1, durch eine Aenderung von x_1; 2, durch eine solche von x_0; 3, durch eine Formänderung der Function y, und 4, durch eine solche der Function z. — Die Totalvariation wird wieder gefunden, wenn man die Summe der von diesen einzelnen Ursachen herrührenden Partialvariationen bildet. — Setzt man wieder:

$$M = \frac{dV}{dx},\quad N = \frac{dV}{dy},\quad P_1 = \frac{dV}{d.\frac{dy}{dx}}, \ldots P_n = \frac{dV}{d.\frac{d^n y}{dx^n}},$$

und:

$$N' = \frac{dV}{dz},\quad P'_1 = \frac{dV}{d.\frac{dz}{dx}}, \ldots . P'_m = \frac{dV}{d.\frac{d^m z}{dx^m}};$$

ſo ergibt ſich auf ähnliche Weiſe, wie in Aufg. III. daß man hat:

$$DU = V_1 dx_1 - V_0 dx_0$$

$$+\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 \delta y_0$$

$$+ (P_2 - \&c.)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 - \&c.)_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+ \&c.$$

$$+\left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1 - \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_0$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n}\right)\delta y$$

$$+\left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \&c.\right)_1 \delta z_1 - \left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \&c.\right)_0 \delta z_0$$

$$+ (P'_2 - \&c.)_1 \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1 - (P'_2 - \&c.)_0 \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0$$

$$+ \&c.$$

$$+\left(P'_m \frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_1 - \left(P'_m \frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_0$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N' - \frac{dP'_1}{dx} + \frac{d^2P'_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^m \frac{d^m P'_m}{dx^m}\right)\delta z.$$

Wenn V mehr als zwei unbeſtimmte Functionen enthält, ſo wird in den Ausdruck von δU oder DU durch jede dieſer Functionen eine Reihe von Gliedern eingeführt, welche von den Variationen dieſer Functionen abhängen und denen in Aufg. III. ähnlich ſind. — Auch bleiben dieſe Ausdrücke gültig, die Functionen $y, z, \ldots$ mögen von einander unabhängig, oder durch eine oder mehrere Gleichungen mit einander verknüpft ſein. —

Aufgabe VI.

15. Die Variation von $U = \int_{x_0}^{x_1} V dx$, zu finden, wenn:

$$V = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^n y}{dx^n},\ z,\ \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right)$$

ist, und die Functionen y, z durch die Gleichung $L = 0$, welche eine Differentialgleichung sein kann, oder nicht, mit einander verbunden sind. —

Auflösung. Der in Aufgabe V erhaltene Ausdruck ist auch auf den jetzigen Fall anwendbar, weil die Art der Ableitung desselben ganz unabhängig davon ist: ob die Größen δy, δz von einander abhängig, oder unabhängig sind. — Da es aber für die Anwendungen der Variationsrechnung durchaus nothwendig ist, daß δy, δz als wirklich independent von einander angesehen werden können; so muß der in Aufg. V erhaltene Ausdruck gewissen Modificationen unterworfen werden, ehe man Anwendung davon machen kann. — Wenn die Gleichung $L = 0$ für eine der Functionen y oder z aufgelöst werden kann, so daß z. B. ein Resultat von der Form $z = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots,\right)$ erhalten wird; so können die Größen:

$$\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2 z}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^m z}{dx^m},$$

offenbar durch bloßes Differenziren gefunden werden, und wenn alsdann die so gefundenen Werthe in V substituirt werden; so wird diese Größe eine bloße Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, ... und die Variation von V wird wie in Aufg. III gefunden. — Da aber die Gleichung $L = 0$ im Allgemeinen eine nicht integrirbare Differentialgleichung ist, so ist dieses Verfahren selten anwendbar, und deshalb zur Beseitignng der Schwierigkeit ein anderer Weg einzuschlagen. — Lagrange hat zu diesem Behuf ein Verfahren gefunden, wovon das Princip hier vorläufig kurz angegeben werden soll, indem wir die vollständige Auseinandersetzung desselben bis zu den Anwendungen der Variationsrechnung auf die Theorie der Maxima und Minima versparen. Für jetzt genügt es, zu zeigen: daß man durch dieses Lagrange'sche Verfahren einen Ausdruck für $\delta \int V dx$ erhält, worin nur eine der Variationen δy oder δz unter dem Integralzeichen vorkommt. —

16. Man setze:

$$\alpha = \frac{dL}{dy}, \quad \beta = \frac{dL}{d.\frac{dy}{dx}}, \quad \gamma = \frac{dL}{d.\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ &c.}$$

$$\alpha' = \frac{dL}{dz}, \quad \beta' = \frac{dL}{d.\frac{dz}{dx}}, \quad \gamma' = \text{&c.}$$

so muß man, da nach der Voraussetzung die Gleichung $L = 0$ für alle bei der jedesmaligen Untersuchung zulässigen Formen der Functionen y, z stattfinden muß, offenbar haben $\delta L = 0$, oder:

$$\alpha\delta y + \beta\frac{d\delta y}{dx} + \gamma\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{&c.} + \alpha'\delta z + \beta'\frac{d\delta z}{dx} + \text{&c.} = 0. \quad (A)$$

Wenn diese Gleichung integrirt werden kann, so ergibt sich daraus eine der Größen δy, δz als Function der andern, z. B. δz als Function von δy, so daß sich die Größen $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d^2\delta z}{dx^2}$, ... durch bloßes Differenziren als Functionen von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, ... ergeben, und wenn diese Werthe alsdann in den in Aufg. V für δU gefundenen Ausdruck substituirt werden; so enthält derselbe nur noch die eine willkürliche Variation δy und deren Differentialquotienten $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$,... In diesem Falle hat alsdann der Ausdruck von δU die gehörige Form und unsere Aufgabe ist vollständig gelöst. —

Da jedoch die Gleichung (A) selten integrirt werden kann, so ist dieses Verfahren im Allgemeinen unbrauchbar. — Addirt man aber zu dem Ausdrucke:

$$\delta V = N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{&c.} + N'\delta z + P_1'\frac{d\delta z}{dx} + P_2'\frac{d^2\delta z}{dx^2} + \text{&c.},$$

die mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirte linke Seite der Gleichung (A), so erhält man:

$$\delta V = (N + \lambda\alpha)\,\delta y + (P_1 + \lambda\beta)\frac{d\delta y}{dx} + \text{&c.}$$

$$+(N'+\lambda\alpha')\,\delta z+(P_1+\lambda\beta')\,\frac{d\delta z}{dx}$$

$$+\,\&c.$$

und hiernach wird der Ausdruck für δU offenbar:

$$\delta U=\left(P_1+\lambda\beta-\frac{d(P_2+\lambda\gamma)}{dx}+\&c.\right)_1\delta y_1$$

$$-\left(P_1+\lambda\beta-\frac{d(P_2+\lambda\gamma)}{dx}+\&c.\right)_0\delta y_0$$

$$+(P_2+\lambda\gamma-\&c.)_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1-(P_2+\lambda\gamma-\&c.)_0\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+\,\&c.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N+\lambda\alpha-\frac{d(P_1+\lambda\beta)}{dx}+\&c.\right)\delta y$$

$$+\left(P'_1+\lambda\beta'-\frac{d(P'_2+\lambda\gamma')}{dx}+\&c.\right)_1\delta z_1$$

$$-\left(P'_1+\lambda\beta'-\frac{d(P'_2+\lambda\gamma')}{dx}+\&c.\right)_0\delta z_0$$

$$+(P'_2+\lambda\gamma'-\&c.)_1\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1-(P'_2+\lambda\gamma'-\&c.)_0\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0$$

$$+\,\&c.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N'+\lambda\alpha'-\frac{d(F'_1+\lambda\beta')}{dx}+\&c.\right)\delta z.$$

Will man nun für δU einen Ausdruck haben, worin nur eine der willkürlichen Variationen δy oder δz unter dem Integralzeichen vorkommt; so kann solches mittelst des unbestimmten Factors λ geschehen. — Denn nimmt man denselben so an, daß der Gleichung:

$$N'+\lambda\alpha'-\frac{d(P'_1+\lambda\beta')}{dx}+\&c.=0,$$

Genüge geschieht, so wird der Ausdruck für δU unabhängig von δz, und wenn man diesen Factor so annimmt, daß der Gleichung:

$$N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. = 0$$

genügt wird; ſo wird der Ausdruck für δU unabhängig von δy.

Wir wollen dieſes Verfahren nun auf einige Beiſpiele anwenden.

Aufgabe VII.

17. Die Totalvariation von $U = \int_{x_0}^{x_1} V dx$ zu finden, wenn:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots . \frac{d^n y}{dx^n}, \int v dx\right),$$

und:

$$v = f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots . \frac{d^m y}{dx^m}\right)$$

iſt. —

Auflöſung. Man ſetze wieder:

$$M = \frac{dV}{dx}, \quad N = \frac{dV}{dy}, \quad P_1 = \frac{dV}{d.\frac{dy}{dx}}, \quad P_2 = \&c.,$$

und:

$$\mu = \frac{dv}{dx}, \quad \nu = \frac{dv}{dy}, \quad \pi_1 = \frac{dv}{d.\frac{dy}{dx}}, \quad \pi_2 = \&c.$$

ferner:

$$z = \int v dx, \quad N' = \frac{dV}{dz};$$

ſo wird die Gleichung:

$$L = 0$$

in dieſem Falle:

$$v - \frac{dz}{dx} = 0;$$

und folglich iſt:

$$\alpha = \nu, \quad \beta = \pi_1, \quad \gamma = \pi_2, \&c. \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = -1, \quad \gamma' = 0, \&c.$$

Setzt man dieſe Werthe in den in Aufg. VI gefundenen allgemeinen Ausdruck von δU, ſo erhält man:

$$\delta U = \left(P_1 + \lambda_1 \pi_1 - \frac{d(P_2 + \lambda\pi_2)}{dx} + \&c.\right)_1 \delta y_1$$

$$- \left(P_1 + \lambda_1 \pi_1 - \frac{d(P_2 + \lambda\pi_2)}{dx} + \&c.\right)_0 \delta y_0$$

$$+ (P_2 + \lambda\pi_2 - \&c.)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 + \lambda\pi_2 - \&c.)_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+ \&c.$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N + \lambda\nu - \frac{d(P_1 + \lambda\pi_1)}{dx} + \frac{d^2(P_2 + \lambda\pi_2)}{dx^2} - \&c.\right) \delta y$$

$$- (\lambda_1 \delta z_1 - \lambda_0 \delta z_0) + \int_{x_0}^{x_1} \left(N' + \frac{d\lambda}{dx}\right) \delta z.$$

Es leuchtet ein: daß wegen $P'_1 = 0$, $P'_2 = 0, \ldots$ keine Glieder mit $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0, \ldots$ vorkommen können, ſo wie: daß die Totalvariation DU erhalten wird, wenn man $V_1 dx_1 - V_0 dx_0$ zu dem vorhergehenden Ausdrucke addirt. —

Um dieſen Ausdruck auf einen andern zu bringen, worin nur eine willkürliche Variation δy unter dem Integralzeichen vorkommt, braucht man λ nur ſo anzunehmen: daß der Gleichung:

$$N' + \frac{d\lambda}{dx} = 0$$

genügt wird, woraus folgt:

$$\lambda = -\int N' dx = i.$$

Subſtituirt man dieſen Werth und addirt $V_1 dx_1 - V_0 dx_0$, ſo ergibt ſich endlich:

$$DU = V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \left(P_1 + i\pi_1 - \frac{d(P_2 + i\pi_2)}{dx} + \&c.\right)_1 \delta y_1$$

$$- \left(P_1 + i\pi_1 - \frac{d(P_2 + i\pi_2)}{dx} + \&c.\right)_0 \delta y_0$$

$$+(P_2+i\pi_2-\&c.)_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1-(P_2+i\pi_2-\&c.)_0\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+\&c.$$

$$+i_1\delta z_1-i_0\delta z_0$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N+iv-\frac{d(P_1+i\pi_1)}{dx}+\frac{d^2(P_2+i\pi_2)}{dx^2}-\&c.\right)\delta y\,.\,dx.$$

Wenn V eine Function von:

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \&c.\ \int^p v dx^p,$$

wäre, ſo würde die Gleichung:

$$L=0$$

offenbar:

$$v-\frac{d^p z}{dx^p}=0,$$

und man ſieht leicht ein, daß der Coefficient von δz unter dem Integralzeichen iſt:

$$N'+\frac{d^p\lambda}{dx^p}.$$

Der Ausdruck von δU wird folglich auf einen andern mit nur einer willkürlichen Variation δy unter dem Integralzeichen gebracht, wenn man ſetzt:

$$\lambda=-\int^p N'dx^p=i_p.$$

Da ferner $P'_1=0$, $P'_2=0,\ldots.$ iſt, ſo wird der letzte Ausdruck von DU durch Subſtitution von i_p für i:

$$DU=V_1dx_1-V_0dx_0+\left(P_1+i_p\pi_1-\frac{d(P_2+i_p\pi_2)}{dx}+\&c.\right)_1 dy_1$$

$$-\left(P_1+i_p\pi_1-\frac{d(P_2+i_p\pi_2)}{dx}+\&c.\right)_0\delta y_0$$

$$+(P_2+i_p\pi_2-\&c.)_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1-(P_2+i_p\pi_2-\&c.)_0\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+\&c.$$

$$+(-1)^{p-1}\left\{\left(\frac{d^{p-1}i_p}{dx^{p-1}}\right)_1\delta z_1-\left(\frac{d^{p-1}i_p}{dx^{p-1}}\right)_0\delta z_0\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d^{p-2}i_p}{dx^{p-2}}\right)_1\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1+\left(\frac{d^{p-2}i_p}{dx^{p-2}}\right)_0\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0\right\}$$

$$+\,\&c.$$

$$+(i_p)_1\left(\frac{d^{p-1}\delta z}{dx^{p-1}}\right)_1-(i_p)_0\left(\frac{d^{p-1}\delta z}{dx^{p-1}}\right)_0$$

$$+\int\left(N+i_p\,\nu-\frac{d(P_1+i_p\,\pi_1)}{dx}+\&c.\right)\delta y\,dx.$$

Aufgabe VIII.

18. Die Variation einer Function von:

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \&c.,$$

zu finden, deren Form durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt wird. —

Auflösung. Es sei:

$$U=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right),$$

indem die Form der Function f so beschaffen ist, daß der Gleichung:

$$L=f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \&c. \quad U, \frac{dU}{dx}\right)=0.$$

Genüge geschieht. — Da die Gleichung $L=0$ nach der Voraussetzung für alle Formen der Function y stattfinden muß, so muß man die Gleichung haben:

$$\delta L=0,$$

welche, wenn wieder gesetzt wird:

$$\alpha=\frac{dL}{dy}, \quad \beta=\frac{dL}{d.\frac{dy}{dx}}, \&c.$$

und:

$$N' = \frac{dL}{dU}, P' = \frac{dL}{d.\frac{dU}{dx}}$$

offenbar übergeht in:

$$\alpha\delta y + \beta\frac{d\delta y}{dx} + \&c. + N'\delta U + P'\frac{d\delta U}{dx} = 0;$$

oder wenn der Kürze wegen:

$$\delta u = \alpha\delta y + \beta\frac{d\delta y}{dx} + \&c.$$

geſetzt wird:

$$N'\delta U + P'\frac{d\delta U}{dx} + \delta u = 0.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit einem unbeſtimmten Factor λ und integrirt theilweiſe; ſo ergibt ſich:

$$\lambda P'\delta U + \int\left(N'\lambda - \frac{d.P'\lambda}{dx}\right)\delta U + \int\lambda\delta u = 0.$$

Da die Gleichung $L = 0$ immer als für $\frac{dU}{dx}$ aufgelöſt angenommen werden kann, ſo kann offenbar $P' = 1$ geſetzt werden, und da der Factor unbeſtimmt iſt; ſo kann derſelbe ſtets ſo angenommen werden: daß der Gleichung:

$$N'\lambda - \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

Genüge geſchieht, woraus folgt:

$$\lambda = e^{\int N'dx}.$$

Hierdurch reducirt ſich die Gleichung auf:

$$\delta U.\, e^{\int N'dx} = -\int e^{\int N'dx}\,\delta u;$$

oder endlich:

$$\delta U = -e^{-\int N'dx}\int e^{\int N'dx}\,\delta u.$$

Wir haben ſo δU durch δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, ... verbunden mit x, y, $\frac{dy}{dx}$, ... ausgedrückt; allein die Form, unter welcher dieſe Variation hier erſcheint, iſt ziemlich unbrauchbar, ſo daß es beſſer iſt, den Ausdruck $\delta . \int U dx$ nach dem Verfahren in Aufg. VI zu behandeln. —

Höhere Variationen.

19. Wir haben bisher in Bezug auf die Veränderlichkeit, oder Unveränderlichkeit der Form der Function $\delta y = \psi(x_1, x_2, \ldots)$ keine beſondere Vorausſetzung gemacht, ſo daß die Reſultate, zu welchen wir gelangt ſind, gültig bleiben, die Form dieſer Function mag unveränderlich, oder veränderlich ſein. — Wenn z. B. das Operationsſymbol F der Bedingung:

$$F.\varphi + F.\varphi_1 = F.(\varphi + \varphi_1),$$

genügt, ſo iſt:

$$\delta F.\varphi = F.\delta\varphi = F.i\psi,$$

die Form der Function ψ mag als veränderlich, oder als unveränderlich angenommen werden. — Dieſes iſt aber nicht mehr gleichgültig, wenn man die zweite Variation, d. h. die Variation der Variation zu betrachten hat. — In dem vorhin angeführten Beiſpiele iſt allgemein:

$$\delta^2 F.\varphi = F.\delta^2\varphi = F.i\delta\psi,$$

und folglich, wenn ψ von unveränderlicher Form wäre:

$$\delta^2 F.\varphi = F.0 = 0;*$$

*) Dieſes Reſultat iſt offenbar unrichtig — denn daraus: daß die Variation der primitiven oder unabhängigen Function φ als von unveränderlicher Form angenommen wird, kann unmöglich folgen: daß die zweite Variation der abhängigen oder derivirten Function $F(\varphi) = 0$ iſt — ſo wenig in der Differentialrechnung der zweite Differentialquotient einer Function deshalb ſtets $= 0$ iſt, weil das Differential dx der unabhängigen Veränderlichen x als conſtant, oder vielmehr als daſſelbe bei den ſucceſſiven Differentiationen angenommen wird. — Die Variation von φ bei den höhern Variationen von $v = F(\varphi)$ als unveränderlich annehmen,

denn offenbar ist:

$$F.\varphi = F.(\varphi + 0) = F.\varphi + F.0,$$

also:

$$F.0 = F.\varphi - F.\varphi = 0.$$

Die Unveränderlichkeit der Form von ψ wollen wir nun im Allgemeinen annehmen, so daß eine primitive (unabhängige) Function eine solche ist, deren Variation von willkürlicher, aber unveränderlicher Form ist — d. h.: wenn u eine primitive Function von beliebig vielen Veränderlichen ist, so wollen wir annehmen, daß die Variation δu so beschaffen ist, daß der Gleichung:

$$\delta^2 u = 0$$

genügt wird. — Hierdurch wird offenbar die Analogie zwischen einer primitiven Function und einer independenten Veränderlichen noch vervollständigt. —

Aufgabe IX.

20. Man soll die zweite Variation des Differentialquotienten $\frac{d^n y}{dx^n}$ finden. —

Auflösung. Nach Aufg. I ist:

$$\delta . \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \delta y}{dx^n},$$

mithin offenbar:

---

heißt offenbar weiter nichts, als $\delta\varphi = \iota\psi$ für die Variation der unabhängigen Function fortwährend zu nehmen, so daß man hat:

$$\delta v = F(\varphi + \delta\varphi) - F(\varphi) = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\delta\varphi = F'(\varphi)\delta\varphi,$$

$$\delta^2 v = (F'(\varphi + \delta\varphi) - F'(\varphi))\delta\varphi = \frac{d^2F}{d\varphi^2}\delta\varphi^2 = F''(\varphi)\delta\varphi^2,$$

etc. etc.

u. s. f. Kurz man braucht nur zu bemerken: daß die unabhängige Function φ hier ganz dieselbe Rolle spielt, wie die unabhängige Veränderliche x in der Differentialrechnung — und daß die eigentlichen Variationen, obgleich sie von Formänderungen der Functionen herrühren, im Calcul doch zuletzt als Werthsänderungen betrachtet und behandelt werden müssen, so daß sich alles wie in den entsprechenden Fällen der Differentialrechnung gestaltet. — S.

$$\delta^2 \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \delta^2 y}{dx^n};$$

aber $\delta^2 y = 0$, weil y eine primitive Function iſt; folglich:

$$\frac{d^n \delta^2 y}{dx^n} = 0,$$

und endlich:

$$\delta^2 . \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

Aufgabe X.

21. Die zweite Variation von:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

zu finden.

Auflöſung. Nach Aufg. II iſt:

$$\delta V = \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{d . \frac{dy}{dx}} . \frac{d\delta y}{dx} + \&c. + \frac{dV}{d . \frac{d^n y}{dx^n}} \frac{d^n \delta y}{dx^n};$$

folglich:

$$\delta^2 V = \delta\left(\frac{dV}{dy} \delta y\right) + \delta\left(\frac{dV}{d . \frac{dy}{dx}} . \frac{d\delta y}{dx}\right) + \&c.$$

Aber wegen:

$$\delta^2 y = 0, \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \&c.$$

iſt:

$$\delta\left(\frac{dV}{dy} \delta y\right) = \delta y \delta . \frac{dV}{dy},$$

und wenn man den Werth von $\delta . \frac{dV}{dx}$ ebenſo wie δV beſtimmt; ſo findet man:

$$\delta . \frac{dV}{dy} = \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y + \frac{d^2 V}{dyd . \frac{dy}{dx}} \frac{d\delta y}{dx} + \&c. + \frac{d^2 V}{dyd . \frac{d^n y}{dx^n}} \frac{d^n \delta y}{dx^n}$$

Ebenſo iſt:

$$\delta \left(\frac{dV}{d . \frac{dy}{dx}} \frac{d\delta y}{dx} \right) = \frac{d\delta y}{dx} \delta . \frac{dV}{d . \frac{dy}{dx}},$$

und:

$$\delta . \frac{dV}{d . \frac{dy}{dx}} = \frac{d^2 V}{dyd . \frac{dy}{dx}} \delta y + \frac{d^2 V}{\left(d . \frac{dy}{dx} \right)^2} + \&c.$$

$$\&c. = \&c.,$$

alſo endlich:

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 V}{dyd . \frac{dy}{dx}} \delta y \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2 V}{\left(d . \frac{dy}{dx} \right)^2} . \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 + \&c.$$

Aufgabe XI.

22. Die zweite Variation von $\int V dx$ zu finden, wo:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^n y}{dx^n} \right)$$

iſt. —

Auflöſung. Nach Aufg. III iſt:

$$\delta \int V dx = \int \delta V dx,$$

und aus demſelben Grunde iſt offenbar:

$$\delta^2 \int V dx = \int \delta^2 V dx,$$

und wenn man für $\delta^2 V$ ſeinen Werth aus der vorhergehenden Aufgabe ſubſtituirt; ſo erhält man endlich:

$$\delta^2 \int V dx$$

$$= \int \left\{ \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 V}{dy\, d.\frac{dy}{dx}} \delta y \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2 V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \&c. \right\} dx.$$

Man ſieht leicht ein, daß durch daſſelbe Verfahren auch die dritten, vierten, ꝛc. Variationen gefunden werden können; allein es würde für die Anwendungen der Variationsrechnung ganz nutzlos ſein, dieſe Rechnung hier weiter fortzuſetzen. —

Drittes Kapitel.

Maxima und Minima unbeſtimmter Functionen einer independenten Veränderlichen.

23. Unter einem Maximum, oder Minimum einer Function verſteht man im Allgemeinen jeden Werth dieſer Function, welcher reſp. größer, oder kleiner iſt, als jeder andere Werth der Function, welcher durch eine unendlich kleine Aenderung irgend eines, oder mehrerer ihrer veränderlichen Elemente erzeugt werden kann. — Aber in der Variationsrechnung ins Beſondere wird unter einem Maximum, oder Minimum der Werth einer derivirten oder abhängigen Function verſtanden, welcher reſp. größer, oder kleiner iſt, als jeder andere Werth, welcher durch eine unendlich kleine Formänderung der primitiven Function erzeugt werden kann. —

Wenn alſo φ eine unbeſtimmte primitive Function, und $u = F.\varphi$ eine davon abhängige oder derivirte Function bedeutet; ſo kommt es darauf an: diejenige Form von φ zu finden, welche u zu einem Maximum, oder Minimum macht. — Zu dem Zwecke ſetzt man $\varphi + i\psi$ ſtatt φ in $u = F.\varphi$, und entwickelt $F.(\varphi + i\psi)$ nach Potenzen von i; ſo muß, wenn $F.\varphi$ ein Maximum oder Minimum werden ſoll, der Coefficient von i in der Entwickelung verſchwinden, und der von i^2 ſtets daſſelbe negative, oder poſitive Zeichen behalten für alle Formen der Function ψ, welche die Bedingungen der Aufgabe geſtatten. — Mit andern Worten: wenn blos die Form von φ ſich ändert, ſo muß $\delta u = 0$ ſein, und wenn ſich auch die Werthe der independenten Veränderlichen ändern; ſo muß $Du = 0$ ſein. — Wir wollen nun dieſe allgemeine Theorie auf Fälle anwenden, wo die Derivation der Functionen durch Differentiation und Integration geſchieht. —*)

*) Wenn $u = F(\varphi)$ iſt, ſo iſt unmittelbar:

$$\delta u = \frac{\delta u}{\delta \varphi}\,\delta\varphi = \frac{du}{d\varphi}\,\delta\varphi$$

Aufgabe I.

24. Wenn y eine unbeſtimmte Function der einen independenten Veränderlichen x iſt, diejenige Form für y zu finden, welche den Ausdruck:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\right)$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Auflöſung. Man ſetze:

$$u = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\right),$$

und es ſei:

$$= \frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi}\,\delta\varphi = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\,\delta\varphi,$$

$$\delta^2 u = \frac{d^2u}{d\varphi^2}\,\delta\omega^2 = \frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2}\,\delta\varphi^2,$$

$$\delta^3 u = \frac{d^3u}{d\varphi^3}\,\delta\varphi^3 = \frac{d^3F(\varphi)}{d\varphi^3}\,\delta\varphi^3, \text{ \&c.}$$

Denn daß die unendlich kleinen Variationen von Formänderungen der Functionen herrühren, iſt für die Rechnung als ſolche ganz gleichgültig, weil ſie in dieſer, wie ſchon wiederholt bemerkt, doch zuletzt als Werthsänderungen aufzufaſſen ſind. — Daraus folgt aber: daß es hier in der Variationsrechnung ebenſo unnöthig iſt, wie in der Differentialrechnung, bei der Theorie des Maximums und Minimums von Reihenentwickelungen Gebrauch zu machen. — Und da die unabhängige Function φ hier ganz dieſelbe Rolle ſpielt, wie die unabhängige Veränderliche x in der Differentialrechnung; ſo erhellet auf der Stelle: daß hier die ganze Theorie dieſelbe bleibt, wie in der Differentialrechnung. (Vergl. Schnuſe: Grundlehren der höhern Analyſis Theil 1, Seite 148 folgg., und S. 168 folgg., oder Cournot: Theorie der Functionen S. 98 folgg., oder endlich: Cauchy: Vorleſungen über die Differentialrechnung, deutſch von C. H. Schnuſe.)

Es kann deshalb alles, was der Verf. in zwei kleinen Noten noch als Ergänzung hinſichtlich der zweiten Variation und des Max., oder Min. hinzufügt, hier füglich wegfallen. — S.

$$du = Mdx + Ndy + P_1 d.\frac{dy}{dx} + P_2\, d.\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

ſo iſt nach Kap. 2, Aufg. II:

$$\delta u = N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \&c.$$

Wenn aber y eine ſolche Form hat, daß u ein Maximum, oder Minimum wird; ſo muß $\delta u = 0$ ſein, oder:

$$N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \&c. = 0.$$

Es iſt aber im Allgemeinen offenbar unmöglich, dieſer Gleichung zu genügen, ohne die Independenz der Form der Function ψ oder δu aufzuheben; denn wenn nicht die Größen N, P_1, P_2, ... einzeln $= 0$ ſind, ſo wird durch die Gleichung:

$$N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \&c. = 0$$

eine Relation zwiſchen der Form der Function δu oder ψ und der Form der Function y oder φ ausgedrückt, wodurch alles Frühere ſinnlos würde. — Auch iſt es im Allgemeinen nicht möglich, den Gleichungen:

$$N = 0,\ P_1 = 0,\ \&c.$$

zu genügen, weil jede dieſer Gleichungen eine allgemeine Relation zwiſchen x und y ausdrückt, alſo die Form der Function y beſtimmt. — Wenn alſo die durch alle dieſe Gleichungen beſtimmte Form der Function y nicht dieſelbe iſt, ſo kann offenbar den Gleichungen:

$$N = 0,\ P_1 = 0,\ \&c.$$

nicht zugleich genügt werden — und da dies im Allgemeinen nicht ſtattfinden wird; ſo iſt endlich einleuchtend: daß unſer Problem im Allgemeinen nicht gelöſt werden kann. —

Wenn die Function u nur eine der Größen:

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \&c.$$

enthält, oder wenn durch die Bedingungen der Aufgabe für jeden Werth von x die Werthe aller dieſer Größen, mit Ausnahme einer einzigen derſelben, fixirt ſind; ſo reducirt ſich die linke Seite der Gleichung:

$$N\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + \&c. = 0$$

auf ein Glied, und kann mithin erfüllt werden. —

Wenn z. B.:

$$u = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

iſt, und unter den Formen der Function y, bei welchen dieſe Function für einen gegebenen Werth von x einen beſtimmten Werth bekommt und die Function u ein Maximum, oder Minimum wird; ſo reducirt ſich die Gleichung:

$$N\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + \&c. = 0$$

auf $P_1 = 0$, und kann mithin erfüllt werden. —

Dieſes wird, geometriſch aufgefaßt, vielleicht noch einleuchtender, wo alsdann die Aufgabe lautet: Eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß für jeden Punkt derſelben die Function:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

ein Maximum, oder Minimum wird, indem dieſe Curve in jedem ihrer Punkte blos mit den durch denſelben Punkt gehenden Curven verglichen wird. —

Beiſpiel.

25. Eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu finden: daß, wenn an irgend einen Punkt T (Fig. 1) derſelben eine Tangente gezogen und bis zum Durchſchneiden mit zwei gegebenen Ordinaten CM, $C'M'$ verlängert wird, das Product $CM \cdot C'M'$, ein Maximum, oder Minimum wird. —

Wenn 0 der Anfangspunkt der Coordinaten und:

$$a = OM,\ a' = OM'$$

iſt, ſo hat man:

$$CM = y + \frac{dy}{dx}(a - x),$$

$$C'M' = y + \frac{dy}{dx}(a' - x),$$

und mithin:

$$V = CM \,.\, C'M' = \left(y + \frac{dy}{dx}(a-x)\right)\left(y + \frac{dy}{dx}(a'-x)\right);$$

folglich:

$$\delta V = \left(2y + (a + a' - 2x)\frac{dy}{dx}\right)\delta y$$

$$+ \left\{\left(y + \frac{dy}{dx}(a - x)\right)(a' - x) + \left(y + \frac{dy}{dx}(a'-x)\right)(a-x)\right\}\frac{d\delta y}{dx}$$

Wenn es nun Bedingung der Aufgabe iſt: daß die Curve in jedem ihrer Punkte nur mit den durch dieſen Punkt gehenden Curven verglichen werden ſoll; ſo muß offenbar $\delta y = 0$ ſein, wodurch die Gleichung $\delta V = 0$ auf:

$$\left(y + \frac{dy}{dx}(a - x)\right)(a' - x) + \left(y + \frac{dy}{dx}(a' - x)\right)(a - x) = 0;$$

reducirt wird, oder reducirt:

$$2\frac{dy}{y} + \frac{dx}{a - x} + \frac{dx}{a' - x} = 0.$$

Durch Integration ergibt ſich hieraus:

$$y^2 = \pm e^2 (a - x)(a' - x), \qquad (A)$$

wo c^2 eine willkürliche Conſtante iſt. Die geſuchte Curve iſt alſo

eine Ellipſe, oder eine Hyperbel, jenachdem das obere, oder untere Vorzeichen genommen wird. —

Betrachten wir nun die zweite Variation $\delta^2 V$, ſo iſt nach Nr. 21 allgemein:

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2 V}{dy\, d.\frac{dy}{dx}}\delta y \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2 V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \&c.$$

alſo in dem gegenwärtigen Falle, wo:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

und nach den Bedingungen der Aufgabe $\delta y = 0$ iſt:

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 2(a-x)(a'-x)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2.$$

Setzt man weiter für $2(a-x)(a'-x)$ ſeinen aus der Gleichung (A) gezogenen Werth, ſo hat man endlich:

$$\delta^2 V = \pm\frac{2y^2}{e^2}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2.$$

Das dem negativen Zeichen entſprechende Maximum bezieht ſich alſo auf die Ellipſe, und das dem poſitiven Zeichen entſprechende Minimum auf die Hyperbel. — Auch leuchtet ein: daß im erſten Falle die Curve ganz zwiſchen den Ordinaten CM, $C'M'$ liegt — und im zweiten außerhalb derſelben. —

Aufgabe II.

26. Die Form der Function y und die Grenzwerthe x_0, x_1 von x ſo zu beſtimmen, daß:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx, \text{ wo } V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

ein Maximum, oder Minimum wird. —

Auflösung. In diesem Falle ist nach Kap. 2 Aufg. III:

$$DU = V_1 dx_1 - V_0 dx_0$$

$$+\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 \delta y_0$$

$$+ (P_2 - \&c.)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 - \&c.)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \qquad (A)$$

$$+ \&c.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n}\right)\delta y \,.\, dx = 0.$$

Zunächst ist zu bemerken, daß hier zwei verschiedene Fälle wohl zu unterscheiden sind — nämlich: 1, Wenn man die Variation δy oder die Form der Function ψ ganz unbeschränkt läßt, die Bedingung jedoch ausgenommen, daß $\frac{d^n \psi x}{dx^n}$ für alle zulässigen Werthe von x endlich bleibt — und: 2, Wenn die Natur der Aufgabe es nothwendig macht, daß man für ψ nur solche Formen wählt, welche gewissen Bedingungen genügen. —

Im ersten Falle sucht man unter allen möglichen Functionen die, welche U zu einem Maximum, oder Minimum macht — und im zweiten Falle wird nur aus einer Klasse von Functionen, welche gewissen Bedingungen genügen, diejenige herausgesucht, welche U zu einem Maximum, oder Minimum macht. — Die sich auf den ersten Fall beziehenden Maxima und Minima werden absolute — und die sich auf den zweiten Fall beziehenden relative Maxima und Minima genannt. — Wir wollen zunächst absolute Maxima und Minima betrachten. —

27. Setzt man:

$$\alpha_1 = V_1 dx_1 + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 \delta y_1 + (P_2 - \&c.)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 + \&c.$$

und:

$$\alpha_0 = V_0 dx_0 + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 \delta y_0 + \&c.$$

sowie:

$$\beta = N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \text{&c.} + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n}.$$

so wird die Gleichung (*A*):

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx = 0.$$

Dieser Gleichung kann aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit oder Unbestimmtheit von δy oder ψ nicht anders genügt werden, als wenn man setzt:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0, \ \beta = 0.$$

Denn wenn nicht $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ wäre, so hätte man die Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx = \alpha_0 - \alpha_1,$$

d. h. das bestimmte Integral einer arbiträren Function ließe sich ohne Bestimmung, oder selbst ohne Beschränkung ihrer allgemeinen Form durch die Grenzwerthe dieser Function und die einer gewissen Anzahl ihrer Differentialquotienten ausdrücken — was offenbar ungereimt ist. — Es ist daher:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0, \ \int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx = 0.$$

Da nun bekanntlich der Werth eines bestimmten Integrales im Allgemeinen von der Form der Function unter dem Integralzeichen abhängt, so ist es offenbar unmöglich, den Werth des letzten Integrales zu bestimmen, ohne wenigstens die Allgemeinheit oder Unbestimmtheit der Function δy zu beschränken*), was unzulässig ist — und deshalb kann der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx = 0,$$

*) Wir sagen absichtlich: „wenigstens beschränken," weil in manchen Fällen der Werth eines bestimmten Integrales gefunden werden kann, ohne daß man die Form der Function unter den Zeichen $\int$ absolut zu bestimmen braucht. —

nur genügt werden, wenn $\beta = 0$ ist. — Man hat demnach die Differentialgleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0,$$

wodurch die Form der Function y bestimmt wird. —

Die Gleichungen:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0, \quad \beta = 0,$$

sind wesentlich verschieden; denn die erste bezieht sich blos auf die Werthe von x und y an den Integrationsgrenzen, während die zweite eine allgemeine Relation zwischen x und y ausdrückt. — Wenn dieses nicht der Fall wäre, so wäre die Auflösung der Aufgabe unmöglich, weil offenbar nur eine allgemeine Relation zwischen x und y stattfinden kann. — Da die Coefficienten der verschiedenen Incremente in der Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0,$$

oder:

$$V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 dy_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 dy_0$$

$$+ (P_2 - \&c.)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_1 - \&c.)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \qquad (B)$$

$$+ \&c.$$

$$+ \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1 - \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0,$$

constant sind, so ist klar: daß, wenn dieser Gleichung überhaupt Genüge geleistet werden kann, solches nur mittelst der arbiträren Constanten möglich ist, welche in dem Integrale der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0$$

vorkommen. — Diese Differentialgleichung ist im Allgemeinen von der $2n$ten Ordnung; denn da V, und mithin im Allgemeinen auch

P_n die Größe $\frac{d^n y}{dx^n}$ enthält, so ist klar, daß auch $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ in $\frac{dP_n}{dx^n}$ vorkommen muß. — Das Integral dieser Gleichung enthält also $2n$ arbiträre Constanten. — Wenn aber die Grenzwerthe von:

$$x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

völlig unbeschränkt sind, so enthält die Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

$2(n+1)$ arbiträre Constanten, nämlich:

$$dx_1, \delta y_1, \delta.\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \ldots \delta.\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_1, \; dx_0, \delta y_0, \ldots \delta.\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0,$$

und in diesem Falle ist es nicht möglich, der Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

zu genügen, weil man die Coefficienten dieser $2(n+1)$ willkürlichen Incremente einzeln $= 0$ setzen müßte, so daß man $2(n+1)$ Gleichungen zwischen $2n$ Größen bekäme. — Dies war auch nicht anders zu erwarten; denn wenn weder in Beziehung auf die Form der Function y, noch hinsichtlich der Integrationsgrenzen eine Beschränkung stattfindet; so kann das Integral offenbar jeden Werth von 0 bis ∞ haben, und mithin weder ein Maximum, noch ein Minimum gestatten. — Die Art der Beschränkung hinsichtlich der Grenzen muß daher in jedem besondern Falle nach den Bedingungen der zu lösenden Aufgabe bestimmt werden:

(1.) Wenn die Grenzwerthe x_0, x_1, von x gegeben sind, also eine solche Form der Function y gesucht wird, daß das zwischen diesen Grenzen genommene Integral $\int V dx$ ein Maximum, oder Minimum wird; so ist $dx_1 = 0$, $dx_0 = 0$, und die Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

ist gleichbedeutend mit den Gleichungen:

$$\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 = 0, \quad \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 = 0,$$

$$(P_2 - \&c.)_1 = 0, \quad (P_1 - \&c.)_0 = 0, \qquad (C)$$
$$\&c. = 0, \qquad \&c. = 0,$$
$$(P_n)_1 = 0, \qquad (P_n)_0 = 0,$$

deren Anzahl genau der Anzahl $2n$ der in dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$\beta = 0$$

vorkommenden willkürlichen Conſtanten gleich iſt, ſo daß alſo die Auflöſung der Aufgabe in dieſem Falle vollſtändig iſt. —

(2.) Wenn ſowohl die Grenzwerthe von x, als die von y gegeben ſind, ſo iſt $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, $dx_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, und die Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

iſt gleichbedeutend mit den $2n - 2$ Gleichungen, welche erhalten werden, wenn man die Coefficienten der verſchiedenen Variationen:

$$\delta.\left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \quad \delta.\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, d.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \ldots \delta.\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_1, \quad \delta.\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0$$

einzeln $= 0$ ſetzt. — Da ſich aber durch die Subſtitution der gegebenen Grenzwerthe von x und y in die allgemeine Auflöſung noch 2 andere Gleichungen ergeben, ſo bleibt die Anzahl der Gleichungen noch $= 2n$.

Wenn alſo von der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0$$

das allgemeine Integral iſt:

$$f(x, y, c_1, c_2 \ldots . c_{2n}) = 0,$$

wo $c_1, c_2, \ldots$ willkürliche Conſtanten ſind; ſo hat man zur Beſtimmung derſelben die $2n$ Gleichungen:

$$f(x_1, y_1, c_1, c_2 \ldots c_{2n}) = 0, \quad f(x_0, y_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}) = 0,$$

$$\left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} - \&c.\right)_1 = 0, \quad \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \&c.\right)_0 = 0,$$

$$(P_3 - \&c.)_1 = 0, \qquad (P_3 - \&c.)_0 = 0, \qquad (D)$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

$$(P_n)_1 = 0, \qquad (P_n)_0 = 0.$$

(3.) Ebenſo, wenn die Grenzwerthe von $x, y, \frac{dy}{dx}$ gegeben ſind, ſo fallen von den Gleichungen (D) wieder zwei, nämlich:

$$\left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \&c.\right)_1 = 0, \quad \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \&c.\right)_0 = 0.$$

weg; aber gleichzeitig ergeben ſich mittelſt der gegebenen Grenzwerthe von $\frac{dy}{dx}$ zwei neue Gleichungen auf folgende Weiſe: Wenn nämlich das Reſultat der Differentiation von:

$$f(x, y, c_1, c_2 \ldots c_{2n}) = 0$$

nach x durch:

$$f'\left(x, y, \frac{dy}{dx} c_1, c_2 \ldots c_{2n}\right) = 0$$

ausgedrückt wird, ſo ſind die beiden neuen Gleichungen:

$$f'\left(x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, c_1, c_2 \ldots c_{2n}\right) = 0,$$

$$f'\left(x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}\right) = 0,$$

wo $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ die gegebenen Grenzwerthe von $\frac{dy}{dx}$ ſind. —

Wenn auch die Grenzwerthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gegeben ſind, ſo wird die Anzahl der Gleichungen (D) nochmals um 2 vermindert; aber man erhält zu gleicher Zeit zwei andere Gleichungen, wenn man die Gleichung:

$$f(x, y, c_1, c_2 \ldots c_{2n}) = 0,$$

zweimal differenzirt, und in die Resultate die gegebenen Grenzwerthe von:

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

substituirt, so daß die Gesammtanzahl der Gleichungen stets $= 2n$ d. h. der Anzahl der willkürlichen Constanten gleich bleibt. — Dasselbe findet statt, wenn die Grenzwerthe beliebig vieler der Größen:

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

gegeben sind. —

(4.) Wenn die Grenzwerthe von $x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \ldots$ nicht unmittelbar gegeben, sondern durch eine, oder mehrere bestimmte Gleichungen unter einander verknüpft sind; so sind offenbar die Variationen derselben nicht mehr independent, und folglich werden zwei oder mehrere Glieder der Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

auf eins reducirt. — Hierdurch wird die Anzahl der Gleichungen, welche dieser letzten Gleichung äquivalent sind, wieder vermindert; aber zugleich auch eine hinreichende Anzahl neuer Gleichungen eingeführt, so daß die Gesammtzahl wieder $= 2n$ ist. — Wenn z. B. die Grenzwerthe von x und y durch die bestimmten Gleichungen:

$$y_1 = f_1(x_1), \quad y_0 = f_0(x_0),$$

mit einander verbunden sind, so hat man zwischen $dx_1, \delta y_1, dx_0, \delta y_0$ die Gleichungen:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 + \delta y_1 = f'_1(x_1) \cdot dx_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0 + \delta y_0 = f'_0(x_0) \cdot dx_0.$$

Werden alsdann die aus diesen Gleichungen abgeleiteten Werthe von $\delta y_1, \delta y_0$ in:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

ſubſtituirt, und die Coefficienten der independenten Variationen einzeln $= 0$ geſetzt; ſo ergibt ſich, daß dieſe Gleichung mit dem Syſteme der folgenden gleichbedeutend iſt:

$$V_1 + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 \left\{f'_1(x_1) - \left(\frac{dy}{dx}\right)_1\right\} = 0,$$

$$V_0 + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 \left\{f'_0(x_0) - \left(\frac{dy}{dx}\right)_0\right\} = 0,$$

$$(P_2 - \&c.)_1 = 0, \qquad (P_2 - \&c.)_0 = 0,$$

$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

indem die übrigen Gleichungen dieſelben ſind, wie früher. — Dieſe $2n$ Gleichungen ſind mit den vier folgenden:

$$y_1 = f_1(x_1), \qquad y_0 = f_0(x_0),$$

$$f(x_1, y_1, c_1, c_2 \ldots c_{2n}) = 0, \qquad f(x_0, y_0, c_1, c_2, \ldots c_{2n}) = 0,$$

zur Beſtimmung der $2n + 4$ Größen:

$$x_1, y_1, x_0, y_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}$$

ausreichend. —

Ebenſo, wenn die Grenzwerthe von x und $\frac{dy}{dx}$ durch die Gleichungen:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = f'_1(x_1), \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f'_0(x_0),$$

mit einander verknüpft wären; ſo hätte man:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 dx_1 + \delta \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = f''_1(x_1).dx_1, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 dx_0 + \delta \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \&c.$$

wodurch die erſten 3 Glieder jeder der Größen α_1, α_0 auf eins reducirt, und folglich die Anzahl der durch $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ gelieferten Gleichungen auf $2n - 2$ vermindert würde. —

Zur Beſtimmung der $2n + 4$ Größen $y_1, \ldots c_1, \ldots c_n$ hat man alsdann außer dieſen $2n - 2$ Gleichungen und den im erſten Theile dieſes Falles vorkommenden 4 Gleichungen noch die beiden folgenden:

$f'(x_1, y_1, f'_1(x_1), c_1 \ldots c_n) = 0$, $f'(x_0, y_0, f'_0(x_0), c_1 \ldots c_n) = 0$,

welche durch Differentiation des allgemeinen Integrales:

$$f(x, y, c_1 \ldots c_n) = 0,$$

und Substitution der Grenzwerthe von:

$$x, y, \frac{dy}{dx}$$

in die Resultate erhalten werden.

Ebenso ergibt sich, daß in allen den Fällen, wo die Bedingungen der Aufgabe irgend welche der independenten Variationen:

$$\delta y_1, \ \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \ \text{\&c.}$$

annulliren, oder beschränken, und folglich die Anzahl der in der Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ enthaltenen Gleichungen vermindern, gleichzeitig dieselbe Anzahl neuer Gleichungen eingeführt wird, so daß die Gesammtzahl der Bestimmungsgleichungen ungeändert bleibt. — Hieraus erhellet also: daß die durch die Bedingung $DU = 0$ gelieferten Gleichungen zur Lösung der Aufgabe, d. h. zur Bestimmung der Form der Function y nothwendig und zureichend sind. —

28. Ehe wir die vorhergehende Theorie auf Beispiele anwenden, wird es nicht unzweckmäßig sein, einige Ausnahmefälle näher zu erörtern. —

(1.) Wenn V eine lineare Function des höchsten Differentialquotienten ist, so kann P_n offenbar $\frac{d^n y}{dx^n}$ nicht enthalten, und folglich ist $\frac{d^n P_n}{dx_n}$ höchstens von der $(2n-1)$ten Ordnung. — Die Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \text{\&c.} + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0$$

kann also von keiner höhern, als von der $(2n-1)$ten Ordnung sein, und mithin ihr allgemeines Integral höchstens $2n-1$ arbiträre Constanten enthalten. — In diesem Falle kann also der Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0,$$

welche, wie wir geſehen haben, $2n$ Gleichungen gleichgilt, im Allgemeinen nicht genügt werden. —

Es läßt ſich übrigens leicht zeigen: daß, wenn V eine lineare Function des höchſten darin vorkommenden Differentialquotienten iſt, die Gleichung:

$$\beta = 0$$

die $(2n-2)$te Ordnung nicht überſteigen kann. — Denn es ſei:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = v,$$

ſo iſt $V = \theta v + \theta'$, wo θ und θ' Functionen von:

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx} \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

ſind. — Da wir ſchon früher geſehen haben, daß die Gleichung:

$$\beta = \theta$$

die Größe $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ nicht enthält; ſo braucht blos gezeigt zu werden, daß ſie $\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}$ nicht enthält. — Dieſer Differentialquotient, wenn er überhaupt vorkommt, kann aber nur in einem der Glieder $\frac{d^{n-1}P_n}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^n P_n}{dx^n}$ vorkommen. — Nun iſt aber:

$$V = \theta v + \theta',\ P_n = 0,\ \frac{d^n P_n}{dx^n} = \frac{d^n \theta}{dx^n},$$

und um den Differentialquotienten $\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}$ in $\frac{d^n P_n}{dx^n}$ oder in $\frac{d^n \theta}{dx^n}$ zu finden, muß man die Werthe von:

$$\frac{d\theta}{dx},\ \frac{d^2\theta}{dx^2},\ \&c.\ \frac{d^n \theta}{dx^n},$$

bilden, indem man bei jedem Schritte immer nur die Differential-

quotienten von der höchſten Ordnung beibehält. — Setzt man nun $u = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, ſo hat man:

$$\frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{d\theta}{dx}\right) + \left(\frac{d\theta}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \&c. + \left(\frac{d\theta}{du}\right) \cdot \frac{du}{dx},$$

in welchem Ausdrucke blos das Glied:

$$\left(\frac{d\theta}{du}\right) \cdot \frac{du}{dx}, \text{ oder } \left(\frac{d\theta}{du}\right) \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

beizubehalten iſt, weil alle andern Glieder offenbar von einer niedrigern, als von der $n$ten Ordnung ſind. —

Ebenſo iſt in $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ nur:

$$\left(\frac{d\theta}{du}\right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2},$$

das Glied von der $(n+1)$ten Ordnung, und ebenſo ergibt ſich, daß in $\frac{d^n\theta}{dx^n}$ nur:

$$\left(\frac{d\theta}{du}\right) \cdot \frac{d^n u}{dx^n}, \text{ oder } \left(\frac{d\theta}{du}\right) \cdot \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}$$

von der $(2n-1)$ten Ordnung iſt. —

Es iſt aber:

$$V = \theta v + \theta', \quad P_{n-1} = v \cdot \left(\frac{d\theta}{du}\right) + \left(\frac{d\theta'}{du}\right),$$

und wenn die Werthe von:

$$\frac{dP_{n-1}}{dx}, \frac{d^2P_{n-1}}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^{n-1}P_{n-1}}{dx^{n-1}},$$

wieder wie vorhin gebildet werden, indem nach jeder Differentiation nur das Glied von der höchſten Ordnung beibehalten wird; ſo ergibt ſich wie vorhin: daß in $\frac{d^{n-1}P_{n-1}}{dx^{n-1}}$ nur:

$$\left(\frac{d\theta}{du}\right).\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}\text{, oder }\left(\frac{d\vartheta}{du}\right).\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}$$

das Glied von der $(2n-1)$ten Ordnung ist.

Da dieses Glied mit dem vorhin als das Glied von der höchsten Ordnung in $\frac{d^n P_n}{dx^n}$ gefundenen identisch ist, so ist klar, daß es aus:

$$\frac{d^{n-1}P_{n-1}}{dx^{n-1}} - \frac{d^n P_n}{dx^n},$$

und mithin aus der Gleichung:

$$\beta = 0$$

verschwindet, und folglich kann diese Differentialgleichung von keiner höhern als der $(2n-2)$ten Ordnung sein. —

Diese Reduction der Gleichung $\beta = 0$ auf eine andere, deren Ordnung um 2 Einheiten niedriger ist, hat Euler zuerst bemerkt, dessen Beweis jedoch, sofern derselbe allgemein ist, mehr zeigt, daß die Reduction zu erwarten ist, als daß sie wirklich stattfindet. — Diese Euler'sche Beweisführung ist etwa folgende:*)

Man setze wieder:

$$u = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, v = \frac{d^n y}{dx^n};$$

so muß man, weil V eine lineare Function von v ist, offenbar haben:

$$V = \theta v + \theta',$$

wo θ und θ' keine höhern Differentialquotienten, als von der $(n-1)$ten Gleichung enthalten. — Es ist mithin:

$$\int V dx = \int \theta v dx + \int \theta' dx.$$

wo das Integral $\int \theta v dx$ offenbar auf die Form:

$$\theta_1 + \int \theta_2 dx,$$

gebracht werden kann, indem θ_1, θ_2 keine höhere Differentialquotienten als u enthalten. — Denn setzt man:

*) Methodus inveniendi etc. pp. 62, 75.

$$\int \theta v dx = \theta_1 + \int \theta_2 dx,$$

und differenzirt; so findet man:

$$\theta v = \left(\frac{d\theta_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\theta_1}{dy}\right).\frac{dy}{dx} + \text{\&c.} + \left(\frac{d\theta_1}{du}\right).\frac{du}{dx} + \theta_2,$$

woraus wegen $v = \frac{du}{dx}$ erhellet, daß der Gleichung:

$$\int \theta v dx = \theta_1 + \int \theta_2 dx$$

genügt wird, wenn man setzt:

$$\left(\frac{d\theta_1}{du}\right) = \theta, \text{ und: } \theta_2 = -\left\{\left(\frac{d\theta_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\theta_1}{dy}\right).\frac{dy}{dx} + \text{\&c.}\right\},$$

und $\theta_1 = \int \theta du$ ist. Wenn also V eine lineare Function des höchsten darin vorkommenden Differentialquotienten ist, so kann das Integral $\int V dx$ immer auf ein anderes $\int V_1 dx$ zurückgeführt werden, worin V_1 keine höhern Differentialquotienten, als von der $(n-1)$ten Ordnung enthält — und wenn diese Reduction vor Anwendung der Variationsrechnung vorgenommen ist; so leuchtet ein, daß die Differentialgleichung, zu welcher man gelangt, von der $(2n-2)$ten Ordnung ist. —

Dieser Beweis ist insofern wichtig, als er zeigt: daß der eben betrachtete Fall eigentlich kein Ausnahmefall von der allgemeinen Methode ist. Denn wenn das gegebene Integral auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht wird, ehe man die Principien der Variationsrechnung darauf anwendet; so erhält dasselbe die Form:

$$\varphi + \int \varphi' dx,$$

oder zwischen Grenzen genommen:

$$\varphi_1 - \varphi_0 + \int_{x_0}^{x_1} \varphi' dx,$$

wo die in φ_1, φ_0 enthaltenen Differentialquotienten von derselben Ordnung sind, als der höchste in φ' vorkommende Differentialquotient. — Dieser Fall wird später besonders behandelt werden, und ist offenbar von den hier untersuchten verschieden, wo die zu einem Maximum, oder Minimum zu machende Größe kein von dem

Integralzeichen freies Glied enthält. — Zugleich erhellet aus dem Vorhergehenden die Nothwendigkeit: ein Integral immer erst auf seinen einfachsten Ausdruck zu bringen, ehe man die Principien der Variationsrechnung darauf anwendet. —

(2.) Ein anderer Ausnahmefall von der obigen allgemeinen Methode ist folgender: Es sei:

$$V = yf(x) + F(x,p), \text{ so ist } N = f(x), \text{ und } P = \frac{dF}{dp}.$$

Alsdann wird die Gleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

unmittelbar integrabel, und gibt:

$$P = \int f(x)\,dx + c = f_1(x) + c.$$

Wird diese letzte Gleichung für p aufgelöst, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$p = F(x,c),$$

und mithin:

$$y = F_1(x,c) + c'.$$

Nehmen wir nun an, daß die Grenzwerthe von x gegeben sind, während die von y unbestimmt bleiben; so ist die Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

gleichbedeutend mit:

$$P_1 = 0, \quad P_0 = 0,$$

oder:

$$f_1(x) + c = 0, \; f_1(x_0) + c = 0.$$

Diesen Gleichungen kann folglich, da sie nur eine unbestimmte Größe c enthalten, im Allgemeinen nicht genügt werden, und mithin gestattet die Aufgabe in dieser Form keine Auflösung, obgleich das allgemeine Integral die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten enthält. — Wenn jedoch $f(x) = 0$, also $V = F(x,p)$ ist, so werden

die beiden Gleichungen $P_1 = 0$, $P_0 = 0$ identiſch, und die Aufgabe iſt lösbar; aber unbeſtimmt, weil eine Conſtante unbeſtimmt bleibt. —

Das Reſultat, zu welchem wir hier gelangt ſind, findet nicht blos für Functionen erſter Ordnung ſtatt. — Denn wenn V eine ſolche Form hat, daß der Gleichung:

$$N = \frac{dV}{dy} = f(x),$$

genügt wird, und es ſind nur die Grenzwerthe von x gegeben; ſo iſt klar, daß noch dieſelben Schlüſſe anwendbar ſind. — Die Gleichung $\beta = 0$ iſt wieder, wie in dem Falle von Functionen erſter Ordnung, unmittelbar integrabel, und gibt:

$$P = \frac{dQ}{dx} + \&c. = f_1(x) + c,$$

ſo daß die beiden erſten in $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ enthaltenen Gleichungen folgende ſind:

$$f_1(x_1) + c = 0, \quad f_1(x_0) + c = 0,$$

welchen im Allgemeinen nicht genügt werden kann, außer für $f_1(x) = 0$, d. h. wenn y gar nicht in V vorkommt. — Iſt allgemein $\frac{d^p y}{dx^p}$ der niedrigſte in V enthaltene Differentialquotient — und V ſo beſchaffen, daß der Gleichung:

$$\frac{dV}{d \cdot \frac{d^p y}{dx^p}} = f(x),$$

Genüge geſchieht — und ſind nur die Grenzwerthe von x, ſo wie die der Differentialquotienten von einer höhern, als von der $p$ten Ordnung gegeben; ſo ergibt ſich durch ähnliche Schlüſſe, wie die obigen, daß die Aufgabe keine Auflöſung geſtattet. —

(3.) Wenn $N = 0$ iſt, und blos die Grenzwerthe von x gegeben ſind, ſo wird die Gleichung $\beta = 0$ offenbar:

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2 P_2}{dx^2} + \&c. = 0;$$

oder integrirt:

$$P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c. = c.$$

Hieraus ſieht man, daß ſich die beiden Bedingungsgleichungen, welche man durch Nullſetzung der Coefficienten von $\delta y_1, \delta y_0$ erhält, nämlich:

$$\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 = 0, \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 = 0,$$

auf eine, nämlich $c = 0$ reduciren, und daß folglich die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ nicht $2n$ ſondern nur $2n - 1$ Gleichungen äquivalent, alſo die Aufgabe in dieſem Falle unbeſtimmt iſt. — Dieſes Reſultat war leicht zu präſumiren. Denn da y nicht in V, oder in den zu erfüllenden Grenzbedingungen vorkommt; ſo kann man $\frac{dy}{dx}$ zur primitiven Function nehmen, und es ſind dann alle in $DU = 0$ enthaltenen Gleichungen erforderlich, um eine Gleichung zwiſchen x und $\frac{dy}{dx}$ ohne willkürliche Conſtante zu erhalten; und die durch Integration daraus abgeleitete Relation zwiſchen x und y muß folglich eine willkürliche Conſtante enthalten. — Aber wenn jeder der beiden Grenzwerthe von y gegeben iſt, ſo wird die Aufgabe wieder beſtimmt. —

Desgleichen, wenn $N = 0$, $P_1 = 0$ iſt, und die Grenzwerthe von y und $\frac{dy}{dx}$ beide unbeſtimmt ſind; ſo enthält die Auflöſung zwei arbiträre Conſtanten, und kann nur zu einer beſtimmten gemacht werden, wenn wenigſtens einer der Grenzwerthe von y und $\frac{dy}{dx}$ fixirt wird. — Allgemein, wenn in der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0$$

die m erſten Glieder fehlen, und keine Beſchränkung der Grenzwerthe von:

$$y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

ſtattfindet; ſo erhält die Auflöſung m willkürliche Conſtanten. —

29. Da ſich die Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0$$

in gewiſſen Fällen ein, oder mehrere Male integriren läßt, ohne daß man die Form der Function V zu beſtimmen braucht; ſo wollen wir einige ſolcher Fälle hier näher unterſuchen, um ſo mehr, als wir dabei zu mehreren allgemeinen Gleichungen gelangen werden, welche die Anwendung der vorhergehenden Theorie auf beſondere Beiſpiele ſehr erleichtern. —

(1.) Wenn die m erſten der Größen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... in V fehlen, alſo:

$$V = f\left(x, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right).$$

iſt; ſo fehlen auch die m erſten Glieder der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0,$$

ſo daß man die Gleichung hat:

$$\frac{d^m P_m}{dx^m} - \frac{d^{m+1}P_{m+1}}{dx^{m+1}} + \&c. = 0,$$

durch deren m malige Integration man folgende Differentialgleichung der $(2n - m)$ten Ordnung erhält:

$$P_m - \frac{dP_{m+1}}{dx} + \&c. = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \&c. + c_{m-1}x^{m-1}.$$

(2.) Es ſei:

$$V = f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

ſo daß x nicht in V explicite vorkommt; ſo hat man:

$$dV = Ndy + P_1 d.\frac{dy}{dx} + P_2 d.\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

$$= \left(N \frac{dy}{dx} + P_1 \frac{d^2y}{dx^2} + P_2 \frac{d^3y}{dx^3} + \&c. + P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) dx;$$

oder wenn man für N ſeinen aus der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0,$$

genommenen Werth ſubſtituirt:

$$dV = \left(P_1 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dP_1}{dx}\right) dx + \left(P_2 \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2P_2}{dx^2}\right) dx + \&c.$$

$$+ \left(P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - (-1)^n \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^nP_n}{dx^n}\right) dx;$$

und folglich:

$$V = c + \int \left(P_1 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dP_1}{dx}\right) dx$$

$$+ \int \left(P_2 \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2P_2}{dx^2}\right) dx + \&c.$$

$$+ \int \left(P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - (-1)^n \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^nP_n}{dx^n}\right) dx.$$

Durch theilweiſe Integration findet man ferner leicht:

$$\int P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx = P_n \frac{d^ny}{dx^n} - \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \&c. + (-1)^n \int \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^nP_n}{dx^n};$$

folglich:

$$\int \left(P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - (-1)^n \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^nP_n}{dx^n}\right) dx = P_n \frac{d^ny}{dx^n} - \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \&c.$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}P_n}{dx^{n-1}};$$

und mithin:

$$V = c + P_1 \frac{dy}{dx} + \left(P_2 \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dP_2}{dx}\right)$$

$$+\left(P_3\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dP_3}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2P_3}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

$$+\ \&c.$$

$$+P_n\frac{d^ny}{dx^n}-\frac{dP_n}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\&c.+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}P_n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dy}{dx}, \quad (F)$$

eine Differentialgleichung, welche höchstens von der $(2n-1)$ten Ordnung ist. —

Wenn also x nicht explicite in V vorkommt, so läßt sich der Ordnungsindex der Gleichung $\beta=0$ wenigstens um eine Einheit verkleinern. — Es wird nicht unpassend sein, wenn wir hier noch einige der wichtigsten speciellen Fälle als Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Formel mittheilen:

(a.) Es sei:

$$V=f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

so ist $V=c+P_1\frac{dy}{dx}$; aber da V, und folglich P_1 Functionen von $\frac{dy}{dx}$ sind, so ist diese Gleichung einerlei mit $\frac{dy}{dx}=c$; also $y=c_1x+c_2$. — Die linearen Functionen haben also die Eigenthümlichkeit: daß sie jede Function von $\frac{dy}{dx}$ zu einem Maximum, oder Minimum machen, welche ein solches gestattet. —

(b.) Wenn:

$$V=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right), \text{ so ist } V=c+P_1\frac{dy}{dx}\Big).$$

(c.) Wenn:

$$V=f\left(y,\frac{d^2y}{dx^2}\right), \text{ so ist } V=c+P_2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dP_2}{dx}.$$

(3.) Wir wollen nun annehmen, daß die beiden unter (1) und (2) betrachteten Fälle zugleich stattfinden, d. h. daß weder x, noch

die m erſten der Größen $\frac{dy}{dx}, \ldots$ in V vorkommen; ſo wird nach (1) die Gleichung $\beta = 0$ durch Integration zunächſt:

$$P_m - \frac{dP_{m+1}}{dx} + \&c. = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \&c. + c_{m-1} x^{m-1};$$

alſo:

$$P_m = \frac{dP_{m+1}}{dx} - \&c. + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \&c. + c_{m-1} x^{m-1}.$$

Setzt man dieſen Werth in die Gleichung:

$$dV = \left(P_m \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + P_{m+1} \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} + \&c. + P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \right) dx,$$

ſo erhält man:

$$\begin{aligned} dV = &\left(P_{m+1} \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} + \frac{dP_{m+1}}{dx} \cdot \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \right) dx \\ &+ \left(P_{m+2} \frac{d^{m+3}y}{dx^{m+3}} - \frac{d^2 P_{m+2}}{dx^2} \cdot \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \right) dx \\ &+ \&c. \\ &+ \left(P_n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - (-1)^{n-1} \frac{d^{n-m}P_n}{dx^{n-m}} \cdot \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \right) dx \\ &+ (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \&c. + c_{m-1} x^{m-1}) \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \end{aligned}$$

und hieraus durch theilweiſe Integration:

$$\begin{aligned} V = c + P_{m+1} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + &\left(P_{m+2} \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} - \frac{dP_{m+2}}{dx} \cdot \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \right) + \&c. \\ + P_n \frac{d^n y}{dx^n} - \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \&c. + (-1)^{n-m-1} &\frac{d^{n-m-1}P_n}{dx^{n-m-1}} \cdot \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \\ + \int (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \&c. + c_{m-1} x^{m-1}) &\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \cdot dx. \qquad (F) \end{aligned}$$

Nun iſt aber allgemein:

$$\int x^k \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = x^k \frac{d^m y}{dx^m} - kx^{k-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

$$+k.k-1.x^{k-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} - \&c. + (-1)^k . k . k-1 . k-2 \ldots 1 . \frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}},$$

woraus ſich die Werthe der Integrale:

$$\int x \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \quad \int x^2 \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \ldots \int x^{m-1} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}},$$

ergeben, wenn man ſucceſſive $k = 1, 2, \ldots m-1$ ſetzt, und wenn man endlich dieſe Werthe in die Gleichung (F) ſubſtituirt; ſo iſt die reſultirende Gleichung offenbar von der $(2n-m-1)$ten Ordnung, d. h. um $m+1$ Einheiten niedriger, als die urſprüngliche Differentialgleichung. —

Es ſei z. B.:

$$V = f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

ſo wird die Gleichung $\beta = 0$ jetzt:

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2P_2}{dx^2} = 0,$$

woraus ſich durch Integration ergibt:

$$P_1 = \frac{dP_2}{dx} + c.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die Gleichung:

$$dV = \left(P_1 \frac{d^2y}{dx^2} + P_2 \frac{d^3y}{dx^3}\right) dx$$

und integrirt, ſo erhält man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$V = c' + c\frac{dy}{dx} + P_2 \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (d)$$

Wir wollen die vorhergehenden Formeln nun auf einige Beiſpiele anwenden. —

Beiſpiel 1.

30. Man ſoll die Form der Function y finden, welche das Integral:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \cdot dx$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Hier iſt:

$$V = f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

und folglich:

$$y = cx + c',$$

wo noch die willkürlichen Conſtanten c, c' zu beſtimmen ſind. —

(1.) Wenn die Grenzwerthe von x und y gegeben ſind, ſo hat man die beiden Gleichungen:

$$y_0 = cx_0 + c', \; y_1 = cx_1 + c',$$

und die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ fällt hinweg, weil:

$$\delta y_1 = 0, \; \delta y_0 = 0.$$

(2.) Wenn nur die Grenzwerthe von x gegeben ſind, ſo wird die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ offenbar:

$$c\,(\delta y_1 - \delta y_0) = 0, \text{ oder } c = 0;$$

ſo daß die andere Conſtante c' unbeſtimmt bleibt. — Dieſes Beiſpiel gehört unter den zweiten Ausnahmefall. —

(3.) Wenn die Grenzwerthe von x und y durch die Gleichungen:

$$y_1 = f_1(x_1), \quad y_0 = f_0(x_0),$$

verknüpft ſind, ſo hat man zwiſchen den Incrementen δy_1, dx_1, δy_0, dx_0 die beiden Gleichungen:

$$\delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 = m_1\, dx_1,$$

$$\delta y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0 = m_0 dx_0,$$

wo resp. m_1, m_0 für $f_1(x_1)$, $f_0(x_0)$ gesetzt ist. — Die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ ist also gleichbedeutend mit:

$$\sqrt{(1+c^2)} + \frac{c}{\sqrt{(1+c^2)}}(m_1 - c) = 0,$$

$$\sqrt{(1+c^2)} + \frac{c}{\sqrt{(1+c^2)}}(m_0 - c) = 0,$$

oder:

$$1 + m_1 c = 0, \quad 1 + m_0 c = 0,$$

welche Gleichungen in Verbindung mit den 4 andern Gleichungen:

$$y_1 = cx_1 + c', \; y_0 = cx_0 + c', \; y_1 = f_1(x_1), \; y_0 = f_0(x_0),$$

zur Bestimmung der 6 Unbekannten:

$$y_1, \; x_1, \; y_0, \; x_0, \; c, \; c'$$

genügen. —

Beispiel 2.

31. Man soll die Form der Function y finden, welche das Integral:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} y^n \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} dx$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

In diesem Falle ist $V = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$; folglich nach (*b*), S. 60:

$$V = P_1 \frac{dy}{dx} + c;$$

oder wegen:

$$P_1 = \frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$$

$$y^n\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=\frac{y^n\frac{dy^2}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}+c,$$

alſo:

$$y^n=c\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)};$$

oder wenn der Symmetrie wegen $c=a^n$ geſetzt wird:

$$dx=\frac{a^n\,dy}{\sqrt{(y^{2n}-a^{2n})}}.$$

Dieſes Differential gehört offenbar in die Klaſſe der ſ. g. binomiſchen Differentiale von der Form:

$$y^{m'-1}\,(a+by^{n'})^{\frac{p'}{q'}}\,dy,$$

indem jetzt iſt:

$$m'=1,\ n'=2n,\ p'=-1,\ q'=2.$$

Nun iſt aber bekanntlich der Ausdruck:

$$y^{m'-1}\,(a+by^{n'})^{\frac{p'}{q'}}\,dy$$

integrabel, wenn:

$$\frac{m'}{n'}=i,\ \text{oder}\ \frac{m'}{n'}+\frac{p'}{q'}=i,$$

d. h. eine ganze Zahl iſt, woraus leicht erhellet, daß:

$$dx=\frac{a^n\,dy}{\sqrt{(y^{2n}-a^{2n})}}$$

integrabel iſt, wenn der Werth von n irgend ein Glied der Reihe:

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \&c.$$

iſt. — Da die Fälle $n=1$ und $n=\frac{1}{2}$ ſpäter wieder vorkommen werden, ſo wollen wir uns jetzt nicht weiter dabei aufhalten. Es ſei:

$$n=\tfrac{1}{3},\ dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}\,dy}{\sqrt{(y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}})}};$$

und man ſetze:

$$z = y^{\frac{1}{3}},\ b = a^{\frac{1}{3}},$$

ſo wird:

$$dx = \frac{3bz^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}};$$

folglich:

$$x + c = 3b \cdot \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}.$$

Nun iſt aber:

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = z\sqrt{(z^2-b^2)} - \int dz\sqrt{(z^2-b^2)}$$

$$= z\sqrt{(z^2-b^2)} - \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} + b^2 \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}};$$

alſo:

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = \tfrac{1}{2}\left[z\sqrt{(z^2-b^2)} + b^2 l \cdot \{z + \sqrt{(z^2-b^2)}\}\right],$$

und endlich:

$$x + c = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot \left[y^{\frac{1}{3}}\sqrt{(y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} + a^{\frac{2}{3}} l \cdot \{y^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}\}\right].$$

Es ſind nun noch die Conſtanten zu beſtimmen.

(1.) Wenn die Grenzwerthe von x und y beide gegeben ſind, ſo hat man zur Beſtimmung der Conſtanten a und c die beiden Gleichungen:

$$x_1 + c = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot \left[y_1^{\frac{1}{3}}\sqrt{(y_1^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} + a^{\frac{2}{3}} l \{y_1^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(y_1^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}\}\right],$$

$$x_0 + c = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot \left[y_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{(y_0^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} + a^{\frac{2}{3}} l \{y_0^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(y_0^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}\}\right].$$

(2.) Wenn blos die Grenzwerthe von x gegeben ſind, ſo iſt die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ äquivalent mit:

$$\left(\frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\right)_0 = 0.$$

Dieſen Gleichungen wird genügt durch:

$$y_1 = 0, \; y_0 = 0, \text{ oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0.$$

Die erſte Annahme gibt offenbar $a = 0$, weil die allgemeine Auflöſung ſonſt unmöglich wäre. Aber wenn $a = 0$ iſt, ſo iſt offenbar $y = 0$ die einzige Auflöſung, welche die Gleichung geſtattet; denn wenn y nicht $= 0$ wäre, ſo müßte $x + c = 0$, und mithin:

$$x_1 + c = 0, \; x_0 + c = 0, \text{ oder } x_1 = x_0,$$

ſein, was nicht möglich iſt. —*) Die zweite Annahme gibt $y_1 = y_0 = a$, weil der Werth $-a$ offenbar unzuläſſig iſt. — Nach der allgemeinen Auflöſung iſt alſo:

$$x_1 + c = \tfrac{1}{2} a l a, \; x_0 + c = \tfrac{1}{2} a l a,$$

und mithin $x_1 = x_0$, was wieder unzuläſſig iſt. — In dieſem Falle geſtattet alſo die Aufgabe keine endliche Auflöſung. —

(3.) Wenn die Grenzwerthe x_0, y_0 und x_1 gegeben ſind, ſo wird die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ offenbar $\alpha_0 = 0$, oder $x_0 + c = 0$, was in Verbindung mit der Gleichung:

$$x_1 + c = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot \left[y_1^{\frac{1}{3}} \sqrt{(y_1^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} + a^{\frac{2}{3}} l \left\{y_1^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(y_1^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}\right\}\right]$$

zur Beſtimmung der Conſtanten a und c genügt. —

---

*) Man braucht von den Gleichungen:

$$y_1 = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \text{ oder } y_0 = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 0,$$

keine in Betracht zu ziehen, weil aus dem Frühern ſchon erhellet: daß weder $y_1 = 0$ noch $y_0 = 0$ ſein kann.

(4.) Wenn die Grenzwerthe von x und y durch die Gleichungen:

$$y_1 = f_1(x_1),\ y_0 = f_0(x_0),\ \text{oder}\ dy_1 = m_1 dx_1,\ dy_0 = m_0 dx_0$$

verknüpft ſind, ſo iſt die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ gleichgeltend mit:

$$\left\{V + P_1\left(m_1 - \frac{dy}{dx}\right)\right\}_1 = 0,\ \left\{V + P_1\left(m_0 - \frac{dy}{dx}\right)\right\}_0 = 0;$$

oder wenn man für V und P_1 ihre Werthe ſetzt und reducirt:

$$1 + m_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 0,\ 1 + m_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0.^*)$$

Beiſpiel 3.

32. Die Form der Function y zu finden, welche das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^n \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}\,dx$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Da x in V nicht explicite vorkommt, ſo muß man die Formel (E) anwenden, welche in dieſem Falle iſt:

$$V = c + P_1\frac{dy}{dx} + P_2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dP_2}{dx};$$

und wegen:

$$V = y^n\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}},\ P_1 = -y^n\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}},\ P_2 = \frac{y^n}{\frac{dy}{dx}},$$

$$\frac{dP_2}{dx} = ny^{n-1} - y^n\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}},$$

*) Wegen der geometriſchen Interpretation dieſer Gleichungen vergl. Kap. IV, wo eine allgemeinere Aufgabe unterſucht wird. —

wird:

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=c;$$

woraus durch Integration folgt:

$$y^n=cx+c'.$$

Da dieſe Gleichung nur zwei arbiträre Conſtanten enthält, ſo iſt es im Allgemeinen nicht möglich, mehr als zwei Gleichungen damit zu genügen; folglich kann auch der Gleichung $\alpha_1-\alpha_0=0$, welche vier Gleichungen im Allgemeinen äquivalent iſt, mittelſt dieſer beiden willkürlichen Conſtanten nicht Genüge geleiſtet werden. — In der That gehört auch die jetzige Aufgabe unter den Ausnahmefall (1) in Nr. 28. Obgleich nun in gewiſſen Fällen die Gleichung $\alpha_1-\alpha_0=0$ nur zwei Gleichungen gleichgeltend iſt, ſo iſt es doch nicht möglich, derſelben durch einen endlichen Werth von y zu genügen, wie ſich aus einer nähern Unterſuchung der verſchiedenen einzelnen Fälle ergibt. —

(1.) Wenn nur die Grenzwerthe von x gegeben ſind, ſo iſt die Gleichung $\alpha_1-\alpha_0=0$ offenbar gleichbedeutend mit:

$$\left(P_1-\frac{dP_2}{dx}\right)_1=0,\ \left(P_1-\frac{dP_2}{dx}\right)_0=0,\ (P_2)_1=0,\ (P_2)_0=0;$$

und wenn die Werthe von P_1, P_2 ſubſtituirt werden; ſo ergibt ſich, daß ſich dieſe vier Gleichungen auf die zwei folgenden reduciren:

$$y_1=0,\ y_2=0.$$

Aus der allgemeinen Auflöſung folgt hiernach:

$$cx_1+c'=0,\ cx_0+c'=0,$$

welchen Gleichungen nur durch $c=0, c'=0$ genügt werden kann; und mithin iſt die einzig mögliche Auflöſung der Aufgabe:

$$y=0,$$

wodurch alſo das gegebene beſtimmte Integral auch $=0$ wird. —

(2.) Wenn beide Grenzwerthe von x und y gegeben ſind, ſo reducirt ſich die Gleichung $\alpha_1-\alpha_0=0$ auf:

$$(P_2)_1=0,\ (P_2)_0=0,\ \text{oder}\ y_1=0,\ y_0=0,$$

welchen Gleichungen alſo nur genügt werden kann, wenn jeder der beiden Grenzwerthe von $y = 0$ iſt, in welchem Falle die Auflöſung $y = 0$ iſt. —

(3.) Wenn die Grenzwerthe von x und y durch die Gleichungen:

$$dy_1 = m_1 dx_1, \quad dy_0 = m_0 dx_0$$

verknüpft ſind, ſo geben die Gleichungen:

$$(P_2)_1 = 0, \quad (P_2)_0 = 0$$

wieder:

$$y_1 = 0, \quad y_0 = 0,$$

ſo daß alſo dieſer Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt iſt, und die Aufgabe wieder nur die Auflöſung $y = 0$ geſtattet. —

Beiſpiel 4.

33. Die Function y ſo zu beſtimmen, daß das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ y - a\sqrt{\left(a + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \right\} dx$$

ein Maximum, oder Minimum wird. —

In dieſem Falle iſt:

$$V = y - a\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

$$P_1 = -\frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}},$$

und da x in V nicht explicite vorkommt; ſo hat man nach S. 60 (b):

$$V = P_1 \frac{dy}{dx} + c,$$

oder:

$$y - a\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = -\frac{a\frac{dy^2}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} + c.$$

Hieraus folgt durch Reduction:

$$(y-c)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=a,$$

alſo:

$$dx=\frac{(y-c)\,dy}{\sqrt{\{a^2-(y-c)^2\}}},$$

und wenn man integrirt:

$$x-b=-\sqrt{\{a^2-(y-c)^2\}},$$

oder:

$$(y-c)^2+(x-b)^2=a^2.$$

Dieſe Gleichung beſtimmt die Form der Function y, und hinſichtlich der Beſtimmung der Conſtanten c, c' wollen wir die verſchiedenen einzelnen Fälle durchgehen. —

(1.) Wenn beide Grenzwerthe von x und y gegeben ſind, ſo iſt:

$$dx_0=0,\ dx_1=0,\ \delta y_0=0,\ \delta y_1=0,$$

die Gleichung $\alpha_1-\alpha_0=0$ verſchwindet folglich, und die willkürlichen Conſtanten c, c' werden durch die Gleichungen:

$$(y_0-c)^2+(x_0-b)^2=a^2,$$

$$(y_1-c)^2+(x_1-b)^2=a^2,$$

beſtimmt, welche durch Subſtitution der Grenzwerthe x_0, y_0, x_1, y_1 in die allgemeine Auflöſung enthalten werden. —

(2.) Wenn die Grenzwerthe von x gegeben ſind, während die von y unbeſtimmt bleiben, ſo iſt die Gleichung $\alpha_1-\alpha_0=0$ in dieſem Falle gleichbedeutend mit:

$$(P_1)_0=0,\quad (P_1)_1=0,$$

und wenn man für $(P_1)_0$, $(P_1)_1$, ihre Werthe:

$$-a\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\right)_0,\quad -a\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\right)_1,$$

ſetzt; ſo geben dieſe Gleichungen:

$$x_0 - b = 0,$$

$$x_1 - b = 0.$$

Da dieſe beiden letzten Gleichungen nur eine willkürliche Conſtante b enthalten, ſo kann denſelben offenbar nicht genügt werden, und das vorgelegte Integral geſtattet mithin in dieſem Falle weder ein Maximum, noch ein Minimum. — In der That gehört dieſes Beiſpiel unter den Ausnahmefall (2) auf S. 55.

(3.) Wenn die Grenzwerthe von x und y durch die Gleichungen:

$$y_0 = f_0(x_0),$$

$$y_1 = f_1(x_1);$$

oder:

$$dy_0 = m_0 dx_0,$$

$$dy_1 = m_1 dx_1$$

verbunden ſind, und man ſetzt für V_1, V_0 ... ihre Werthe in die Gleichungen in (4) in Nr. 27; ſo ergibt ſich:

$$y_1 - a\sqrt{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)} - a\left(m_1 - \frac{dy_1}{dx_1}\right)\frac{\frac{dy_1}{dx_1}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)}} = 0,$$

$$y_0 - a\sqrt{\left(1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}\right)} - a\left(m_0 - \frac{dy_0}{dx_0}\right)\frac{\frac{dy_0}{dx_0}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}\right)}} = 0;$$

oder durch Reduction:

$$y_1\sqrt{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)} - a\left(1+m_1\frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0,$$

$$y_0\sqrt{\left(1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}\right)} - a\left(1+m_0\frac{dy_0}{dx_0}\right) = 0.$$

Subſtituirt man ferner für $\frac{dy_1}{dx_1}$, $\frac{dy_0}{dx_0}$ ihre durch Differenziren der

allgemeinen Auflöſung gefundenen Werthe, und reducirt; ſo erhält man endlich die beiden Gleichungen:

$$c + (x_1 - b)\, m_1 = 0,$$

$$c + (x_0 - b)\, m_0 = 0,$$

welche nebſt den 4 Gleichungen:

$$(y_1 - c)^2 + (x_1 - b)^2 = a^2, \quad y_1 = f_1(x_1),$$

$$(y_0 - c)^2 + (x_0 - b)^2 = a^2, \quad y_0 = f_0(x_0),$$

zur Beſtimmung der 6 Größen:

$$x_1,\ y_1,\ x_0,\ y_0,\ b,\ c$$

hinreichend ſind. —

Aufgabe III.

34. Wenn:

$$U = V' + \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

V von derſelben Form, wie in Aufg. II und:

$$V' = f'\left\{x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{n'}y}{dx^{n'}}\right)_0,\ x_1, y_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdots \left(\frac{d^{n''}y}{dx^{n''}}\right)_1\right\}$$

iſt, die Form der Function y und die Grenzwerthe x_0, x_1 ſo zu beſtimmen, daß U ein Maximum, oder Minimum wird. —

Auflöſung. Da die allgemeine Gleichung:

$$\beta = 0$$

blos aus den unter dem Integralzeichen ſtehenden Gliedern gebildet iſt, ſo iſt ſie offenbar dieſelbe, wie in der vorhergehenden Aufgabe, und wir brauchen deshalb blos die ſich auf die Grenzen beziehenden Glieder zu betrachten. Setzt man:

$$dV' = M' dx_0 + N' dy_0 + P'_1 d\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \&c. + P'_{n'} d\left(\frac{d^{n'}y}{dx^{n'}}\right)_0$$

$$+ M'' dx_1 + N'' dy_1 + P''_1 d\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \&c. + P''_{n''} d\left(\frac{d^{n''}y}{dx^{n''}}\right)_1,$$

ſo iſt leicht einzuſehen, daß die in DU wegen V' hinzukommenden Glieder folgende ſind:

$$M'dx_0 + N'\delta y_0 + P'_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 + \&c. + P'_{n'}\left(\frac{d^{n'}\delta y}{dx^{n'}}\right)_0$$

$$+ M''dx_1 + N''\delta y_1 + P''_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 + \&c. + P''_{n''}\left(\frac{d^{n''}\delta y}{dx^{n''}}\right)_1 .$$

Die linke Seite der Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ wird daher um dieſe Glieder vermehrt, und da ſie offenbar ganz von derſelben Form ſind, wie die bereits vorhandenen Glieder; ſo bleibt die Behandlungsweiſe der neuen Gleichung in den verſchiedenen vorkommenden Fällen auch dieſelbe, wie früher. Nur eine wichtige Bemerkung iſt hinzuzufügen, nämlich die: daß nach den frühern Betrachtungen die Möglichkeit, der Gleichung:

$$DU = 0$$

zu genügen, davon abhängt: daß die Anzahl der in der Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

vorkommenden *independenten Incremente* im Allgemeinen die Anzahl der in dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$\beta = 0$$

vorkommenden *arbiträren Conſtanten nicht übertrifft.* — Wenn alſo ein Fall vorkommen ſollte, wo die Anzahl dieſer Incremente *größer* wäre, als die Anzahl dieſer Conſtanten; ſo könnte offenbar der Bedingung:

$$DU = 0$$

nicht mehr genügt werden. — Nun iſt aber in dem vorliegenden Falle die Anzahl der durch V' eingeführten und ſich auf die *untere* Grenze beziehenden Incremente:

$$dx_0,\ \delta y_0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{n'}\delta y}{dx^{n'}}\right)_0,$$

offenbar $= n' + 2$, und die Anzahl der ſchon in α_0 vorkommenden,

ſich auf dieſelbe Grenze beziehenden Incremente iſt, wie ſchon früher bemerkt worden, $= n + 1$.

Wenn alſo:

$$n' + 2 > n + 1$$

oder:

$$n' > n - 1,$$

iſt, ſo geſtattet die Aufgabe keine Löſung — und ähnliche Schlüſſe gelten hinſichtlich der obern Grenze. — Wenn alſo die neu hinzugefügte Größe V' einen Differentialquotienten von einer höhern als von der $(n-1)$ten Ordnung enthält, ſo geſtattet die vorgelegte Function U weder ein Maximum, noch ein Minimum. —

Ein Fall hiervon iſt ſchon S. 54 angeführt, wo gezeigt wurde: daß, wenn V eine lineare Function des höchſten darin vorkommenden Differentialquotienten iſt, das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

auf die Form:

$$\varphi_1 - \varphi_0 + \int \varphi'\,dx$$

gebracht werden kann, wo φ_1, φ_0 Differentialquotienten enthalten von derſelben Ordnung, als die des höchſten in φ' vorkommenden Differentialquotienten. — In dieſem Falle iſt alſo:

$$n' = n'' = n > n - 1,$$

und es iſt, wie wir ſchon früher geſehen haben, nicht möglich, der Gleichung:

$$DU = 0$$

zu genügen. — Beiſpiele hiervon werden in Kap. 4 vorkommen. Da aber die Behandlungsweiſe jedes vorkommenden Falles der in Aufg. II ähnlich iſt, ſo wollen wir hier nur ein Beiſpiel des eben erwähnten Ausnahmefalles durchführen, hauptſächlich, um ſeine Identität mit einem früher behandelten Falle darzuthun. —

Beiſpiel.

35. Es ſei:

$$U = y_1^n \, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 - y_0^n \, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 - n\int_{x_0}^{x_1} y^{n-1}\,\frac{dy}{dx}\,l\,\frac{dy}{dx}\,dx,$$

ſo iſt:

$$V' = y_1^n \, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 - y_0^n \, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

$$V = -ny^{n-1}\frac{dy}{dx}\,l\,\frac{dy}{dx};$$

folglich:

$$P_1 = -ny^{n-1}\,l\,\frac{dy}{dx} - ny^{n-1}.$$

Subſtituirt man nun die Werthe von V und P_1 in die Gleichung:

$$V = c + P_1\,\frac{dy}{dx},$$

ſo ergibt ſich nach verrichteten Reductionen:

$$ny^{n-1}\,\frac{dy}{dx} = c;$$

oder integrirt:

$$y^n = cx + c'.$$

Hinſichtlich der außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder hat man offenbar:

$$\alpha_1 = V_1\,dx_1 + \{(P_1)_1 + N'\}\delta y_1 + P'_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1,$$

$$\alpha_0 = V_0\,dx_0 + \{(P_1)_0 - N''\}\delta y_0 - P''_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0.$$

Nun iſt aber:

$$N' = \frac{dV'}{dy_1} = ny_1^{n-1}\,l\left(\frac{dy}{dx}\right)_1;$$

folglich:

$$(P_1)_1 + N' = -ny_1^{n-1}.$$

Ferner:

$$P'_1 = \frac{dV'}{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)_1} = \frac{y_1^n}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1};$$

alſo:

$$\alpha_1 = V_1\,dx_1 - ny_1^{n-1}\delta y_1 + \frac{y_1^n}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1.$$

Ebenſo ergibt ſich:

$$\alpha_0 = V_0 dx_0 - ny_0^{n-1}\delta y_0 + \frac{y_0^n}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0.$$

Vergleicht man nun die Werthe von α_1, α_0 mit denen in Beiſpiel 3 in Nr. 32, ſo ſieht man leicht ein, daß die Coefficienten von:

$$\delta y_1, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1,\ \delta y_0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0,$$

in beiden Fällen identiſch ſind, und da auch die allgemeine Auflöſung:

$$y^n = cx + c',$$

mit der in Beiſpiel 3 identiſch iſt; ſo ſind auch die dortigen Schlüſſe in dem gegenwärtigen Falle anwendbar, und folglich geſtattet auch die jetzige Aufgabe außer $y = 0$ keine Auflöſung. —

Die Identität der beiden Aufgaben erhellet auch, wenn man nach der Euler'ſchen Methode (S. 53) zeigt: daß der Ausdruck von U in Beiſpiel 3, nämlich:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^n \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}dx,$$

auf die Form:

$$y_1^n\, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 - y_0^n\, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 - n\int y^{n-1}\frac{dy}{dx}\, l\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

gebracht werden kann. — Setzt man zu dem Zwecke:

$$\int y^n \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} dx = \varphi + \int \varphi' dx$$

und differenzirt beide Seiten dieſer Gleichheit, ſo erhält man:

$$y^n \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{d.\frac{dy}{dx}}\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi'. \qquad (G)$$

Weiter gibt die Gleichſetzung der Coefficienten von $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d\varphi}{d.\frac{dy}{dx}} = \frac{y^n}{\frac{dy}{dx}},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\varphi = y^n l \frac{dy}{dx} + f(x, y),$$

indem f eine arbiträre Function iſt. —

Subſtituirt man dieſen Werth in die übrigen Glieder der Gleichung (G), ſo erhält man:

$$\varphi' = -ny^{n-1} l \frac{dy}{dx} - \frac{df}{dx} - p \frac{df}{dy};$$

folglich:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi' dx = -n \int_{x_0}^{x_1} y^{n-1} l \frac{dy}{dx} dx - f(x_1, y_1) + f(x_0, y_0).$$

Wenn man aber die Werthe x_1, y_1 und x_0, y_0 ſucceſſive in:

$$\varphi = y^n l \frac{dy}{dx} + f(x, y)$$

ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = y_1^n l \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 - y_0^n l \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

und es iſt mithin endlich:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^n \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}\,dx = \varphi_1 - \varphi_0 + \int_{x_0}^{x_1} \varphi' dx$$

$$= y_1{}^n\, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 - y_0{}^n\, l\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 - n\int_{x_0}^{x_1} y^{n-1}\frac{dy}{dx}\, l\frac{dy}{dx}\,dx.$$

Aufgabe IV.

36. Wenn:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

und:

$$V = f\left\{x, y, \frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^n y}{dx^n}, x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0\cdots\left(\frac{d^{n'}y}{dx^{n'}}\right)_0,\right.$$

$$\left. x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1\cdots\left(\frac{d^{n''}y}{dx^{n''}}\right)_1\right\}$$

iſt, die Form der Function y und die Grenzwerthe x_0, x_1 ſo zu beſtimmen: daß U ein Maximum, oder Minimum wird. —

Auflöſung. Die allgemeine Gleichung:

$$DU = 0$$

wird in dieſem Falle (Kap. 2, Aufg. IV):

$$\left[V_1 + \int_{x_0}^{x_1}\left\{\mu_1 + \nu_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \pi_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 + \text{&c.}\right\}dx\right]dx_1$$

$$+\left[-V_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left\{\mu_0 + \nu_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \pi_0\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \text{&c.}\right)\right\}dx\right]dx_0$$

$$+\left\{\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \text{&c.}\right)_1 + \int_{x_0}^{x_1}\nu_1\,dx\right\}\delta y_1$$

$$-\left\{\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \text{&c.}\right)_0 - \int_{x_0}^{x_1}\nu_0 dx\right\}\delta y_0$$

$$+\left\{(P_2-\&c.)_1+\int_{x_0}^{x_1}\pi_1\,dx\right\}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1-\left\{(P_2-\&c.)_0-\int_{x_0}^{x_1}\pi_0 dx\right\}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0$$

$$+\ \&c.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(N-\frac{dP_1}{dx}+\frac{d^2P_2}{dx^2}-\&c.\right)\delta y=0,$$

und wenn man dieſelbe, wie in Aufg. II, auf die Form bringt:

$$\alpha_1-\alpha_0+\int_{x_0}^{x_1}\beta\delta x\,dx=0;$$

ſo iſt zunächſt klar: daß β daſſelbe iſt, wie früher, und daß mithin die Form der allgemeinen Differentialgleichung, welche die Form der Function y beſtimmt, durch die Annahme: daß V die Grenzwerthe von:

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \&c.$$

enthält, nicht geändert wird. —

Ferner ſind die in $\alpha_1-\alpha_0$ enthaltenen Glieder noch von derſelben Beſchaffenheit, wie in Aufg. II, indem ſie in der That Reihen von der Form:

$$A_1\,dx_1+B_1\,\delta y_1+C_1\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1+\&c.+A_0\,dx_0+B_0\,\delta y_0+C_0\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0+\&c.$$

bilden, wo:

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ \&c.,\ A_0,\ B_0,\ C_0,\ \&c$$

Conſtanten ſind. —

Denn in den Ausdrücken:

$$\int_{x_0}^{x_1}\mu_1\,dx,\ \&c.,\ \int_{x_0}^{x_1}\mu_0\,dx,\ \&c.$$

wird dieſelbe Vorausſetzung gemacht, wie in Bezug auf:

$$\left(P_1-\frac{dP_2}{dx}+\&c.\right)_1,\ \left(P_1-\frac{dP_2}{dx}+\&c.\right)_0,$$

und die übrigen Coefficienten der verſchiedenen in $\alpha_1 - \alpha_0$ vorkommenden Incremente in Aufg. II, nämlich die Vorausſetzung: daß der aus der Gleichung:

$$\beta = 0$$

hergeleitete Werth von y in μ_1, μ_0, &c. ſubſtituirt iſt. — Iſt dieſe Subſtitution gemacht und dann die beſtimmte Integration ausgeführt, ſo werden die Glieder:

$$\int_{x_0}^{x_1} \mu_1 dx, \int_{x_0}^{x_1} \mu_0 dx, \text{ \&c.}$$

conſtant. —

Hieraus erhellet nun: daß die Behandlungsweiſe der Gleichung:

$$DU = 0,$$

in den verſchiedenen vorkommenden Fällen der in Aufg. II ganz ähnlich iſt — und die Beſchränkungen hinſichtlich der Möglichkeit der Aufgabe ſind denen in Aufg. III analog. — Wenn nämlich n' oder $n'' > n - 1$ iſt, ſo iſt offenbar die Anzahl der in $\alpha_1 - \alpha_0$ enthaltenen willkürlichen Incremente größer, als die Anzahl der in dem allgemeinen Integrale der Gleichung $\beta = 0$ vorkommenden arbiträren Conſtanten, und es iſt mithin im Allgemeinen nicht möglich, der Bedingung $DU = 0$ zu genügen. —

Hieraus und aus der vorhergehenden Aufgabe ſchließen wir alſo: daß der Ausdruck:

$$V' + \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Minimum geſtattet, wenn V, oder V' irgend einen der Grenzwerthe eines Differentialquotienten von y enthält, welcher von einer gleichen, oder höhern Ordnung iſt, als der in V vorkommende höchſte allgemeine Differentialquotient $\frac{d^n y}{dx^n}$. —

Anmerkung. Aus der allgemeinen Unterſuchung in Aufg. II, III und IV ſieht man: daß, wenn jede der Bedingungen der Aufgabe, oder die zu einem Maximum, oder Minimum zu machende Function die Grenzwerthe von Differentialquotienten der Function y von einer höhern als der $(n-1)$ten Ordnung enthält, die Variations-

rechnung keine Auflösung zu geben scheint. — Man kann deshalb die ganz natürliche Frage stellen: ob solche Aufgaben überhaupt eine Auflösung gestatten? — Die Antwort hierauf ist leicht, wenn man bemerkt: daß bei der obigen allgemeinen Untersuchung gemischte Functionen stillschweigend ausgeschlossen sind; denn es ist immer vorausgesetzt: daß die Function y für alle Werthe des x von $x = x_0$ bis $x = x_1$ incl. dieselbe Form behält. — Die Frage ist daher nicht: ob unter den Bedingungen der Aufgabe ein gegebenes Integral irgend ein Maximum, oder Minimum gestattet, sondern ob demselben ein solcher Werth ertheilt werden kann unter der Bedingung: daß die Form der Function y ungeändert bleibt? — Aufgaben der vorhin betrachteten Art lassen eine solche Auflösung nicht zu. — Aber wenn gemischte Functionen gestattet werden, so wird die Möglichkeit der Lösung wieder hergestellt. — Dieses läßt sich geometrisch vielleicht noch deutlicher machen. — Es sei z. B.:

$$V = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right),$$

und zwischen zwei gegebenen Punkten A, B eine Linie von solcher Beschaffenheit zu beschreiben, daß die Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^my}{dx^m},$$

an jedem dieser Punkte gegebene Werthe haben und das bestimmte Integral $\int V dx$ ein Maximum, oder Minimum wird. —

Die Lösung dieser Aufgabe wird durch eine gemischte Linie gegeben, welche besteht: 1) aus einem endlichen Stücke, welches der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} = 0$$

genügt, und durch die Punkte A, B geht, und 2) aus zwei unendlich kleinen Theilen in A und B, welche den andern Bedingungen der Aufgabe genügen. —

Wenn z. B. die kürzeste Linie gesucht würde, welche durch die Punkte A, B geht, und zwei gegebene Linien, berührt; so würde die Aufgabe durch eine Linie gelöst, welche aus einem zwischen A und B

liegenden geradlinigen Stücke beſteht, das von zwei unendlich kleinen Elementen begrenzt wird, welche die gegebenen Linien berühren. —

Beiſpiel.

37. Es ſei:

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{\sqrt{(a-y)}}dx,$$

und a eine gegebene Function von x_1, y_1; man ſoll die Form der Function y ſo beſtimmen: daß U ein Maximum, oder Minimum wird. —

Auflöſung. Da in dieſem Falle V eine Function von $y, \frac{dy}{dx}$ iſt; aber x nicht explicite enthält; ſo hat man nach (*b*) Seite 60:

$$V=c+P_1\frac{dy}{dx}.$$

Es iſt aber:

$$V=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{\sqrt{(a-y)}},\quad P_1=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a-y)}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}},$$

alſo durch Subſtitution:

$$\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{\sqrt{(a-y)}}=c+\frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{\sqrt{(a-y)}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}},$$

oder reducirt:

$$1=c\sqrt{(a-y)}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

oder $\frac{1}{c^2}=b$ geſetzt und für $\frac{dy}{dx}$ aufgelöſt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{b-a+y}{a-y}\right)}. \qquad (H)$$

Dieſe Gleichung läßt ſich leicht integriren, wenn man ſetzt:

$$a - y = b\cos^2\theta,$$

und gibt:

$$x + b' = b \arccos\sqrt{\left(\frac{a-y}{b}\right)} + \sqrt{\{b(a-y) - (a-y)^2\}}, \qquad (I)$$

wo nun noch die Conſtanten b, b' in den verſchiedenen Fällen zu beſtimmen ſind. —

1) Wenn die Grenzwerthe von x und y gegeben ſind, ſo iſt a offenbar eine Conſtante, und mithin die Aufgabe von der Aufg. II in keiner Beziehung verſchieden. — Alle Glieder von $\alpha_1 - \alpha_0$ verſchwinden von ſelbſt, und die Conſtanten b, b' werden wie in Aufg. II durch Subſtitution der gegebenen Grenzwerthe von x und y in die allgemeine Auflöſung beſtimmt. —

2) Wenn die Grenzwerthe von x gegeben ſind, während die von y unbeſtimmt bleiben; ſo iſt nach Nr. 13, weil a blos eine Function von x_1, y_1 iſt:

$$\alpha_1 = \left[V_1 + \int_{x_0}^{x_1}\left\{\mu_1 + \nu_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\right\}dx\right]dx_1 + \left\{(P_1)_1 + \int_{x_0}^{x_1}\nu_1\,dx\right\}\delta y_1,$$

$$\alpha_0 = V_0 dx_0 + (P_1)_0 \delta y_0;$$

oder weil die Grenzwerthe x_1, x_0 fixirt, alſo $dx_1 = 0$, $dx_0 = 0$ ſind:

$$\alpha_1 = \left\{(P_1)_1 + \int_{x_0}^{x_1}\nu_1 dx\right\}\delta y_1,\ \alpha_0 = (P_1)_0\delta y_0.$$

Die Gleichung $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ iſt demnach gleichbedeutend mit:

$$(P_1)_1 + \int_{x_0}^{x_1}\nu_1 dx = 0,\ (P_1)_0 = 0.$$

Nun iſt aber:

$$\nu_1 = \frac{dV}{dy_1} = \frac{dV}{da}\frac{da}{dy_1} = -\tfrac{1}{2}\frac{da}{dy_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{(a-y)^{\frac{3}{2}}}\,dx,$$

und wenn man dieſe Werthe von $(P_1)_1$, $(P_1)_0$, ν_1 in die obigen Gleichungen ſubſtituirt; ſo findet man leicht, daß die zweite gleichbedeutend iſt mit:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \text{ oder } y_0 - a + b = 0,$$

und die erſte mit:

$$\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(a-y)}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\right)_1 - \tfrac{1}{2}\frac{da}{dy_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{(a-y)^{\frac{3}{2}}}\,dx = 0,$$

oder für $\frac{dy}{dx}$ ſeinen aus (H) genommenen Werth ſubſtituirt:

$$\sqrt{\left(\frac{b-a+y_1}{a-y_1}\right)} - \tfrac{1}{2}\frac{bda}{dy_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{(a-y)^2} = 0. \qquad (K)$$

Setzt man ferner für dx ſeinen Werth:

$$dy\sqrt{\left(\frac{a-y}{b-a+y}\right)},$$

ſo erhält man:

$$\int\frac{dx}{(a-y)^2} = \int\frac{dy}{(a-y)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{(b-a+y)}} = \frac{2}{b}\sqrt{\left(\frac{b-a+y}{a-y}\right)},$$

und wird dieſer Werth in (K) geſetzt; ſo folgt wegen:

$$y_0 - a + b = 0,$$

leicht:

$$\sqrt{\left(\frac{b-a+y_1}{a-y_1}\right)}\left(1-\frac{da}{dy_1}\right) = 0. \qquad (L)$$

Dieſer Gleichung wird genügt, wenn man:

$$b - a + y_1 = 0,$$

oder:

$$\frac{du}{dy_1} = 1$$

ſetzt. — Die erſte dieſer beiden Gleichungen gibt:

$$y_1 = y_0 = a - b,$$

und wenn man dieſen Werth von y_1 in die allgemeine Auflöſung (*I*) ſetzt; ſo findet man:

$$x_1 + b' = b \operatorname{arc.cos.} 1 = 2i\pi b.$$

Ebenſo ergibt ſich:

$$x_0 + b' = b \operatorname{arc.cos.} 1 = 2i'\pi b,$$

und folglich:

$$b = \frac{x_1 - x_0}{2(i - i')\pi}, \quad b' = \frac{i'x_1 - ix_0}{i - i'}.$$

Da die Form $f(x_1, y_1)$ der Function a gegeben iſt, ſo ergibt ſich ihr Werth aus der Gleichung:

$$a = f(x_1, y_1) = f(x_1, a - b).$$

Wenn der zweite Factor der Gleichung (L) gleich Null geſetzt wird, ſo ſieht man leicht ein, daß man zur Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten b, b' die Gleichungen hat:

$$x_0 + b' = 2i'\pi b,$$

$$x_1 + b' = b \operatorname{arc.cos} \sqrt{\left(\frac{a - y_1}{b}\right)} + \sqrt{\{b(a - y_1) - (a - y_1)\}^2},$$

wo y_1 durch die Gleichung:

$$\frac{da}{dy_1} = 1$$

gegeben wird. — Wir brauchen uns übrigens bei dieſem Beiſpiele hier nicht länger aufzuhalten, weil daſſelbe bei den mechaniſchen Anwendungen der Variationsrechnung wieder vorkommen wird. —

Aufgabe V.

38. Wenn y eine Function von x iſt, welche der Gleichung:

$$D\int_{x_0}^{x_1} V dx = 0,$$

genügt, zu beſtimmen, welche weitere Bedingungen erforderlich ſind, damit der Werth des beſtimmten Integrales wirklich ein Maximum, oder Minimum wird, ſo wie ein ſicheres Kriterium zur Unterſcheidung des Maximums von dem Minimum zu finden.

Die Löſung dieſer Aufgabe, welche eine der ſchwierigſten der ganzen Variationsrechnung iſt, muß mit Recht C. G. J. Jacobi zugeſchrieben werden. — Denn obgleich Legendre, und ſpäter Lagrange, dieſelbe Aufgabe unterſucht und auch theilweiſe gelöſt haben; ſo ſind ihre Methoden doch mit ſolchen Schwierigkeiten verbunden, daß ſie praktiſch faſt unbrauchbar ſind. — Beide große Geometer haben allerdings ein Kriterium gefunden, wodurch das Maximum von dem Minimum unterſchieden wird — ſo wie eine der Bedingungen aufgeſtellt, welche zur Exiſtenz eines Maximums, oder Minimums erforderlich iſt; allein dieſe Bedingung, obgleich nothwendig, iſt doch nicht hinreichend, und das Verfahren, wodurch ſie dieſen Mangel haben erſetzen wollen, hängt von Differentialgleichungen, oder in letzter Inſtanz vielmehr von Ungleichheiten ab, zu deren Integration ſie kein Mittel angegeben haben. — Dieſe weſentliche Lücke in der Theorie der Maxima und Minima iſt durch das Verfahren von Jacobi, welches wir nun auseinanderſetzen wollen, vollſtändig ausgefüllt. —*)

39. Im Vorhergehenden haben wir geſehen: daß die Form der Function y, welche einem Maximum, oder Minimum eines gegebenen beſtimmten Integrales $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ entſpricht, durch eine Dif-

*) Die Originalabhandlung von Jacobi findet man in Crelle's Journal, Bd. 17, S. 68, oder in Liouvelle's Journal, Tom. III, pag. 44. — Der Verf. dieſes Lehrbuches verdankt namentlich der ſehr tüchtigen Abhandlung von Delaunay in Liouville's Journal, Tom. VI, pag. 209 ſehr viel, welche gleichſam eine weitere Entwickelung von Jacobi's Entdeckungen iſt, und um ſo wünſchenswerther war, als die Abhandlung von Jacobi ſehr kurz gefaßt iſt. —

ferentialgleichung bestimmt wird, deren Ordnung doppelt so hoch ist, als die des höchsten in V vorkommenden Differentialquotienten von y. — Der so bestimmte Werth von y ist daher von der Form:

$$f(x, c_1, c_2, \ldots c_{2n}),$$

und wenn dieser Werth in das gegebene Integral substituirt wird; so ist klar: daß der Werth dieses Integrales zum Theil von der Form der Function f und zum Theil von den Werthen der verschiedenen Constanten $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ abhängt. — Unsere Untersuchung zerfällt daher von selbst in zwei Abtheilungen; nämlich:

1) ist zu untersuchen: ob die durch die Differentialgleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \&c. = 0$$

bestimmte allgemeine Form der Function y für gegebene Werthe der in dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung vorkommenden Constanten das Integral $\int V dx$ wirklich zu einem Maximum, oder Minimum macht — und:

2) ob diese Werthe der Constanten in jedem besondern Falle so beschaffen sind, daß sie für das Integral $\int V dx$ einen Werth geben, welcher größer, oder kleiner ist, als jeder andere Werth, welcher durch eine unendlich kleine Aenderung des Werthes irgend welcher dieser Constanten erhalten werden kann? —

Diese beiden Fragen sind offenbar wesentlich verschieden, und können folglich unabhängig von einander untersucht werden. — Wenn man z. B. zeigen kann, daß der

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots c_{2n})$$

entsprechende Werth von $\int V dx$ weder durch eine unendlich kleine Aenderung in der Form der Function y, bei constanten Werthen von $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$, noch durch eine unendlich kleine Aenderung dieser willkürlichen Constanten, indem die Function y dieselbe Form behält, vergrößert werden kann; so ist klar, daß dieser Werth von $\int V dx$ ein wirkliches Maximum ist. — Nun haben wir aber in Aufg. II gesehen, daß, wenn die Grenzwerthe von:

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

gegeben sind, die Werthe der Constanten als Functionen dieser Grenzwerthe gefunden werden können — und mithin sind auch umgekehrt diese Grenzwerthe gegeben, wenn die Werthe der Constanten $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ gegeben sind. — Die beiden Abtheilungen unserer Untersuchung lassen sich demnach auch wie folgt ausdrücken:

1) Zu untersuchen, ob die aus der Gleichung:

$$\beta = 0$$

abgeleitete Form der Function y so beschaffen ist, daß sie das Integral $\int V dx$ für gegebene Werthe von:

$$x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0, \quad x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_1 \qquad (m)$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht? —

2) Ob die aus der Gleichung:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0$$

abgeleiteten particulären Werthe der Größen (m) so beschaffen sind, daß sie den entsprechenden Werth des Integrales $\int V dx$ größer, oder kleiner machen, als jeder andere Werth, welcher durch eine unendlich kleine Aenderung einer, oder mehrerer dieser Größen erhalten werden kann? —

Nur mit der Untersuchung der ersten dieser beiden Fragen beschäftigt sich die eigentliche Variationsrechnung, während die zweite in der Differentialrechnung, bei der gewöhnlichen Theorie der Maxima und Minima der Functionen mehrerer independenter Veränderlicher, vollständig erledigt wird. —

Die wesentliche Bedingung für die Existenz eines Maximums, oder Minimums einer abhängigen oder derivirten Function $u = F.\varphi$ einer primitiven oder unabhängigen Function $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ besteht, wie bereits im Eingange dieses Kapitels bemerkt wurde, darin: daß der Werth (die Form) von y, welche die erste Variation von u verschwinden macht, auch das Zeichen der zweiten Variation von u von der Form von δy oder ψ independent macht, vorausgesetzt, daß diese Form nicht mit irgend einer der Bedingungen der Aufgabe unverträglich ist. — In dem Falle nun, welchen wir jetzt betrachten, wo die Grenzwerthe von:

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

fixirt ſind, iſt offenbar keine Form von δy zuläſſig, welche nicht den Bedingungen:

$$\delta y_0 = 0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 = 0, \text{ &c.} \left(\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0,$$

$$\delta y_1 = 0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 = 0, \text{ &c.} \left(\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1 = 0$$

genügt. — Es iſt mithin für die Exiſtenz eines Maximums, oder Minimums des betrachteten Integrales durchaus nothwendig: daß das Zeichen der zweiten Variation dieſes Integrales für jede Form von δy, welche außer der Bedingung in Nr. 9 auch den vorhergehenden genügt, daſſelbe bleibt. —

Ferner iſt nothwendig: daß keine ſolche Form von δy die Größe unter dem Zeichen $\int$ in der zweiten Variation unendlich macht für irgend einen innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Werth von x. —

Und endlich iſt im Allgemeinen erforderlich: daß keine Form von δy, welche den vorhergehenden Bedingungen genügt, die zweite Variation von u verſchwinden macht. — Denn wenn dieſe zweite Variation verſchwindet, ohne daß die dritte Variation zugleich verſchwindet; ſo erhellet ganz wie in der Differentialrechnung, daß weder ein Maximum, noch ein Minimum ſtattfinden kann. —

40. Zur größern Klarheit der folgenden Unterſuchung, welche ihrer Natur nach nothwendig etwas weitläufig ausfallen muß, wollen wir von vornherein gleich bemerken: daß es ſich darum handelt, zu zeigen, daß die zweite Variation des betrachteten Integrales durch theilweiſe Integration auf die Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} Q_n \left(A\delta y + A_1 \frac{d\delta y}{dx} + A_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{&c.} + A_n \frac{d^n \delta y}{dx^n}\right)^2 dx,$$

gebracht werden kann, wo:

$$Q_n = \frac{d^2 V}{\left(d.\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2}$$

ist, und A, A_1, A_2, ... A_n Functionen von x sind. — Aus dieser Transformation erhellet alsdann:

1) Daß das Zeichen der zweiten Variation und von dem der Größe Q_n abhängt, weil der andere Factor nothwendig positiv ist, so daß also eine der erforderlichen Bedingungen für das Maximum, oder Minimum darin besteht, daß für alle zwischen x_0 und x_1 liegenden Werthe von x resp.:

$$Q_n < \text{oder} > 0.$$

Denn wenn Q_n innerhalb der Integrationsgrenzen das Zeichen ändert, so kann man, wie später gezeigt werden wird, das Zeichen der zweiten Variation beliebig positiv, oder negativ machen — so daß weder ein Maximum, noch ein Minimum stattfinden kann. — Diese Bedingung ist schon von Legendre und von Lagrange angegeben. —

2) Daß, wenn diese Bedingung erfüllt wird, der Werth des Integrales ein Maximum, oder Minimum ist, jenachdem Q_n negativ, oder positiv ist, vorausgesetzt, daß die Größe:

$$Q_n\left(A\delta y + A_1\frac{d\delta y}{dx} + A_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \&c. + A_n\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)^2,$$

für keinen zwischen den Integrationsgrenzen liegenden Werth von x unendlich wird — und vorausgesetzt: daß kein zulässiger Werth von δy der Gleichung genügt:

$$A\delta y + A_1\frac{d\delta y}{dx} + \&c. = 0.$$

3) Daß, um zu entscheiden, ob diese Bedingungen erfüllt werden, oder nicht, wie später gezeigt werden wird, nur die Kenntniß des vollständigen Integrales der Gleichung:

$$\beta = 0$$

erforderlich ist — und daß mithin in jedem Falle, wo man Aufg. II zu lösen im Stande ist, man auch die Mittel zu der Entscheidung in den Händen hat: ob die gefundene Auflösung ein wirkliches Maximum oder Minimum ist. —

Zunächſt aber haben wir die folgenden Hülfsſätze zu beweiſen, welche zu dieſer Unterſuchung unumgänglich nothwendig ſind:

Hülfsſatz I.

41. Wenn β der Coefficient von δy unter dem Integralzeichen in der Variation von $\int V dx$ iſt, ſo kann $\delta\beta$ auf die Form:

$$\delta\beta = A_0\delta y + \frac{d.A_1\frac{d\delta y}{dx}}{dx} + \frac{d^2.A_2\frac{d^2\delta y}{dx^2}}{dx^2} + \&c. + \frac{d^n.A_n\frac{d^n\delta y}{dx^n}}{dx^n}$$

gebracht werden. — Denn es iſt:

$$\beta = N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c.,$$

folglich, wenn man variirt:

$$\delta\beta = \delta N - \delta.\frac{dP_1}{dx} + \delta.\frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c.$$

$$= \delta N - \frac{d\delta P_1}{dx} + \frac{d^2\delta P_2}{dx^2} - \&c.$$

Betrachten wir irgend ein Glied:

$$\frac{d^m\delta P_m}{dx^m}$$

dieſer Reihe, und ſuchen die Variation von P_m nach den gewöhnlichen Regeln; ſo findet ſich:

$$\delta P_m = \frac{dP_m}{dy}\delta y + \frac{dP_m}{d.\frac{dy}{dx}}\frac{d\delta y}{dx} + \&c. + \frac{dP_m}{d.\frac{d^{m'}y}{dx^{m'}}}\frac{d^{m'}\delta y}{dx^{m'}} + \&c.$$

Aber wegen:

$$P_m = \frac{dV}{d.\frac{d^my}{dx^m}}$$

iſt:

$$\frac{dP_m}{d.\frac{d^{m'}y}{dx^{m'}}} = \frac{d^2V}{d.\frac{d^m y}{dx^m} d.\frac{d^{m'}y}{dx^{m'}}},$$

und wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m},\ y^{(m')} = \frac{d^{m'}y}{dx^{m'}},\ u = \delta y,$$

so kann das allgemeine Glied der Reihe für:

$$\frac{d^m \delta P_m}{dx^m}$$

geschrieben werden:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^2V}{dy^{(m)}dy^{(m')}} \cdot \frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}\right). \qquad (1)$$

Wenn nun $m = m'$ ist, so hat dieses Glied schon die verlangte Form, und wenn m nicht $= m'$ ist; so kommt in dem Ausdrucke von:

$$\frac{d^{m'}\delta P_{m'}}{dx^{m'}}$$

offenbar ein Glied:

$$\frac{d^{m'}}{dx^{m'}}\left(\frac{d^2V}{dy^{(m)}\,dy^{(m')}} \cdot \frac{d^m u}{dx^m}\right) \qquad (2)$$

vor. — Da ferner die Glieder der ursprünglichen Reihe für $\delta\beta$ abwechselnd positiv und negativ sind, so haben die Glieder (1) und (2) gleiche, oder entgegengesetzte Zeichen, jenachdem $m - m'$ eine gerade, oder ungerade Zahl ist. Die Glieder der Reihe für $\delta\beta$, mit Ausnahme derjenigen, welche schon die gehörige Form haben, lassen sich demnach in Paare von der Form:

$$\frac{d^m . K\frac{d^{m'}u}{dy^{m'}}}{dx^m} \pm \frac{d^{m'} . K\frac{d^m u}{dx^m}}{dx^{m'}},$$

ordnen, wo:

$$K = \frac{d^2V}{dy^{(m)}\,dy^{(m')}}$$

iſt. — Aber nach einem Theoreme der Differentialrechnung*) kann ein ſolches Gliederpaar ſtets durch eine Reihe von der Form:

$$\frac{d^{m'} \cdot C_{m'} \dfrac{d^{m'}u}{dx^{m'}}}{dx^{m'}} + \frac{d^{m'+1} \cdot C_{m'+1} \dfrac{d^{m'+1}u}{dx^{m'+1}}}{dx^{m'+1}} + \&c.$$

ausgedrückt werden, wo $m' < m$ iſt. — Hiernach iſt alſo der Satz einleuchtend, weil offenbar kein Glied von einer höhern Ordnung als:

$$\frac{d^n \cdot A_n \dfrac{d^n \delta y}{dx^n}}{dx^n}$$

vorkommen kann. Es iſt leicht einzuſehen, daß:

$$A_n = \pm \frac{d^2 V}{(dy^{(n)})^2}$$

iſt, wo das obere, oder das untere Zeichen gilt, jenachdem n gerade, oder ungerade iſt. — Denn der Coefficient von:

$$\frac{d^{2n}\delta y}{dx^{2n}}$$

in $\delta\beta$ iſt offenbar:

$$\pm \frac{dP_n}{dy^{(n)}} = \pm \frac{d^2 V}{(dy^{(n)})^2},$$

während der Coefficient deſſelben Gliedes in der obigen Reihe $= A_n$ iſt; und da dieſe beiden Coefficienten identiſch ſein müſſen, ſo hat man:

$$A_n = \pm \frac{d^2 V}{(dy^n)^2}.$$

Hülfsſatz II.

42. Wenn u eine Function von x iſt, welche der Differenzial-Gleichung:

*) Wegen des Beweiſes dieſes Theoremes vergl. die Note A.

$$Au + \frac{d \cdot A_1 \frac{du}{dx}}{dx} + \&c. + \frac{d^n \cdot A_n \frac{d^n u}{dx^n}}{dx^n} = 0$$

genügt, wo A, $A_1, \ldots$ Functionen von x ſind; ſo iſt:

$$u\left(Ay + \frac{d \cdot A_1 \frac{dy}{dx}}{dx} + \&c. + \frac{d^n \cdot A_n \frac{d^n y}{dx^n}}{dx^n}\right) dx = U\,dx$$

unabhängig von der Form von y integrabel, und das Integral kann ausgedrückt werden durch:

$$\int U dx = B_1 \frac{dt}{dx} + \frac{d \cdot B_2 \frac{d^2 t}{dx^2}}{dx} + \&c + \frac{d^{n-1} \cdot B_n \frac{d^n t}{dx^n}}{dx^{n-1}},$$

wo $t = \frac{y}{u}$ iſt, und $B_1, B_2, \ldots B_n$ Functionen von x ſind, welche von $A_1, A_2, \ldots$ abhängen — und endlich iſt:

$$B_n = A_n u^2.\ *)$$

Hülfsſatz III.

43. Wenn:

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots c_{2n})$$

das vollſtändige Integral der Gleichung $\beta = 0$ iſt, ſo iſt von $\delta\beta = 0$ das vollſtändige Integral:

$$\delta y = C_1 \frac{dy}{dc_1} + C_2 \frac{dy}{dc_2} + \&c. + C_{2n} \frac{dy}{dc_{2n}},$$

wo:

$$C_1, C_2, \ldots . C_{2n}$$

ein neues Syſtem arbiträrer Conſtanten iſt, welche folglich unendlich klein ſind. —

*) Wegen des Beweiſes dieſes Jacobi'ſchen Theoremes vergl. die Note B. Da daſſelbe mehr in die eigentliche Integralrechnung gehört, ſo iſt es im Texte blos angeführt, und der Beweis in eine beſondere Note verwieſen. —

Denn wenn in:

$$y = f(x, c_1, c_2 \ldots . c_{2n})$$

die verſchiedenen Conſtanten c_1, c_2, ... c_{2n} die unendlich kleinen Incremente dc_1, dc_2, ... dc_{2n} erhalten, ſo iſt das entſprechende Increment von y:

$$\frac{dy}{dc_1} dc_1 + \frac{dy}{dc_2} dc_2 + \&c. + \frac{dy}{dc_{2n}} dc_{2n}.$$

Aber da der neue Werth von y durch eine unendlich kleine Aenderung der Werthe der in y vorkommenden willkürlichen Conſtanten aus dem frühern Werthe von y entſtanden iſt; ſo iſt klar: daß dieſer neue Werth von y auch der Gleichung:

$$\beta = 0$$

noch genügt. — Setzt man alſo:

$$\delta y = \frac{dy}{dc_1} dc_1 + \frac{dy}{dc_2} dc_2 + \&c. + \frac{dy}{dc_{2n}} dc_{2n},$$

ſo iſt klar, daß dieſer Werth von δy der Gleichung:

$$\delta\beta = 0$$

genügt. — Da aber dc_1, dc_2, ... dc_{2n} arbiträre (unendlich kleine) Incremente ſind, ſo kann man dafür die (unendlich kleinen) arbiträren Conſtanten C_1, C_2, ... C_{2n} ſetzen, woraus folgt, daß der Ausdruck:

$$\delta y = C_1 \frac{dy}{dc_1} + C_2 \frac{dy}{dc_2} + \&c. + C_{2n} \frac{dy}{dc_{2n}}$$

der Gleichung:

$$\delta\beta = 0$$

genügt — und da β im Allgemeinen die Größen:

$$y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$$

enthält; ſo wird $\delta\beta$ offenbar die Größen:

$$\delta y, \frac{d\delta y}{dx} \cdots \frac{d^{2n}\delta y}{dx^{2n}}$$

enthalten, so daß mithin die Gleichung:

$$\delta\beta = 0$$

in Bezug auf δy von der 2nten Ordnung ist. — Der obige Werth von δy enthält also ebensoviele arbiträre Constanten, als der Ordnungsindex der Gleichung Einheiten hat — und ist mithin das vollständige Integral. —

Hülfssatz IV.

44. Wenn β der Coefficient von δy unter dem Integralzeichen in δU ist, so wird die zweite Variation $\delta^2 U$ durch die Gleichung:

$$\delta^2 U = \int_{x_0}^{x_1} \delta\beta\delta y dx$$

gegeben. —

Denn in dem jetzt betrachteten Falle, wo die Grenzwerthe von:

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

gegeben sind, wird die erste Variation:

$$\delta U = \int \beta\delta y dx,$$

und wenn man hiervon auf beiden Seiten die Variationen nimmt; so erhält man wegen $\delta^2 y = 0$ sofort:

$$\delta^2 U = \int_{x_0}^{x_1} \delta\beta\delta y dx.$$

45. Nachdem diese Hülfssätze erledigt sind, wollen wir zunächst die in Nr. 40 angeführte Transformation vornehmen, indem wir der Deutlichkeit wegen mit den einfachsten Fällen beginnen. —

(1.) Es sei:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

ſo iſt nach Nr. 11 in dieſem Falle:

$$\beta = N - \frac{dP_1}{dx},$$

und folglich nach Hülfsſatz I:

$$\delta\beta = A\delta y + \frac{d \cdot A_1 \frac{d\delta y}{dx}}{dx}.$$

Es ſeien c_1, c_2 die in dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$\beta = 0$$

enthaltenen Conſtanten, und:

$$u = C_1 \frac{dy}{dc_1} + C_2 \frac{dy}{dc_2};$$

ſo wird nach Hülfsſatz III der Gleichung:

$$\delta\beta = 0$$

durch $\delta y = u$ genügt, und mithin iſt $u\delta\beta\,dx$ nach Hülfsſatz II ein genaues Differential, deſſen Integral von der Form iſt:

$$B_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{u}\right).$$

Setzt man:

$$\delta y = u\delta' y,$$

wo $\delta' y$ eine andere Variation von y bedeutet, und ſubſtituirt dieſen Werth in die zweite Variation:

$$\delta^2 U = \int_{x_0}^{x_1} \delta\beta\,\delta y\,dx;$$

ſo erhält man:

$$\delta^2 U = \int_{x_0}^{x_1} u\delta\beta\,\delta' y\,dx. \qquad \text{(a)}$$

Wegen:

$$\int u\delta\beta\,dx = B_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{u}\right) = B_1 \frac{d\delta' y}{dx}$$

ergibt ſich aber durch theilweiſe Integration der rechten Seite der Gleichung (*a*):

$$\delta^2 U = \left(B_1 \frac{d\delta' y}{dx}\right)_1 \delta' y_1 - \left(B_1 \frac{d\delta' y}{dx}\right)_0 \delta' y_0 - \int_{x_0}^{x_1} B_1 \left(\frac{d\delta' y}{dx}\right)^2 dx.$$

und da die Grenzwerthe von y fixirt ſind; ſo muß:

$$\delta y_1 = 0, \quad \delta y_0 = 0,$$

und folglich:

$$u_1 \delta' y_1 = 0, \quad u_0 \delta' y_0 = 0$$

ſein. — Wenn alſo die in dem Werthe von u vorkommenden willkürlichen Conſtanten ſo beſtimmt werden können: daß weder u_0, noch u_1 verſchwindet; ſo iſt nothwendig:

$$\delta' y_1 = 0, \quad \delta' y_0 = 0,$$

und folglich:

$$\delta^2 U = -\int_{x_0}^{x_1} B_1 \left(\frac{d\delta' y}{dx}\right)^2 dx.$$

Nach Hülfsſatz I und II iſt ferner:

$$B_1 = u^2 A_1 = -u^2 \frac{d^2 V}{\left(d \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2},$$

und:

$$\delta' y = \frac{\delta y}{u}, \quad \frac{d\delta' y}{dx} = u \frac{\frac{d\delta y}{dx} - \frac{du}{dx}\delta y}{u^2},$$

und endlich nach Subſtitution dieſer Werthe in den von $\delta^2 U$:

$$\delta^2 U = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 V}{\left(d \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2} \left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\delta y - \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 dx. \qquad \text{(b)}$$

46. Aus dieſem Ausdrucke erhellet unmittelbar, daß man nur dann mit Gewißheit behaupten kann: daß U ein Maximum, oder ein Minimum geſtattet, wenn:

$$\frac{d^2V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2} = Q_1$$

zwiſchen den Integrationsgrenzen das Zeichen nicht wechſelt. — Denn wenn ſolche Zeichenwechſel ſtattfinden, ſo beſteht das beſtimmte Integral in δ^2U aus einer Summe theils poſitiver, theils negativer Elemente — und es läßt ſich wegen der Unbeſtimmtheit von δy im Allgemeinen nicht entſcheiden, ob dieſe Summe einen poſitiven, oder negativen Werth hat. — Es muß alſo unabhängig von δy, d. h. indem es ganz unbeſtimmt bleibt, δ^2U ſtets negativ, oder poſitiv bleiben, alſo auch Q_1, wenn ein Max., oder Min. von U ſtattfinden ſoll. —*)

Weiter wird zur Exiſtenz eines Maximums, oder Minimums erfordert: daß die in δ^2U unter dem Zeichen $\int$ ſtehende Größe für keinen zwiſchen den Grenzwerthen liegenden Werth von x unendlich wird. — Ob dieſe Bedingung erfüllt wird, oder nicht, ergibt ſich unmittelbar, wenn das allgemeine oder vollſtändige Integral der Gleichung:

$$\beta = 0$$

bekannt iſt. — Denn alsdann ergeben ſich die Werthe der verſchiedenen Größen:

$$Q_1,\ u,\ \frac{du}{dx},$$

durch bloßes Differenziren als Functionen von x, und wenn dieſe Werthe alsdann in den Ausdruck

---

*) Der Verf. dagegen ſucht, indem er $\delta y = 0$, $\frac{d\delta y}{dx} = 0$ ſetzt, zu beweiſen, daß δ^2U beliebig poſitiv, oder negativ gemacht werden kann, wenn Q_1 das Zeichen wechſelt — und meint ſogar: daß δ^2U poſitiv, oder negativ werde, jenachdem Q_1 negativ, oder poſitiv iſt! — S.

$$\frac{d^2V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\delta y-\frac{d\delta y}{dx}\right)^2,$$

bstituirt werden; so sieht man sofort: ob man die in u vorkommen- n Constanten so annehmen kann, daß dieser Ausdruck für alle zwi- ien x_0, x_1 liegenden Werthe von x einen endlichen Werth be- mmt, oder nicht. —

Endlich ist zur Existenz eines Maximums, oder Minimums i Allgemeinen erforderlich: daß kein zulässiger Werth von δy r Gleichung:

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\delta y-\frac{d\delta y}{dx}=0$$

er:

$$\delta y=u$$

nügt, weil nach der Form von u offenbar die arbiträre Constante :gfallen kann. — Hieraus erhellet leicht: daß das betrachtete Inte- al im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Mini- um gestattet, wenn sich u so bestimmen läßt: daß den Bedingun- n:

$$u_1=0,\quad u_0=0$$

nügt wird — was auch aus der Gleichheit:

$$\delta^2U=\int_{x_0}^{x_1}\delta\beta\delta y dx;$$

hellet. Denn nach Hülfssatz III genügt die Annahme $\delta y=u$ der leichung:

$$\delta\beta=0,$$

ıb reducirt mithin die zweite Variation auf Null. — Wenn also ein zulässiger Werth von δy ist, d. h. wenn sich die in u vor- ımmenden willkürlichen Constanten so bestimmen lassen, daß die renzwerthe $u_1=0$, $u_0=0$ werden; so findet im Allgemeinen :der ein Maximum, noch ein Minimum statt. —

47. Wenn Q_1 für alle zwischen x_0 und x_1 liegenden Werthe n x endlich bleibt, so ist nach der Form, auf welche die zweite ariation gebracht ist, einleuchtend: daß die unter dem Zeichen $\int$ ste- nde Größe nur durch eine der Annahmen:

$$\frac{du}{dx} = \infty \text{ oder } u = 0$$

unendlich gemacht werden kann — und in Nr. 46 haben wir gesehen: daß das vorgelegte Integral im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Minimum gestattet, wenn man C_1 und C_2 so bestimmen kann, daß den Gleichheiten:

$$u_1 = 0, \quad u_0 = 0$$

Genüge geschieht. — Weiter erhellet aus der letzten der beiden vorhergehenden Voraussetzungen, daß es auch nothwendig ist: daß man diese Constanten so bestimmen kann, daß u für keinen zwischen x_0 und x_1 liegenden Werth von x verschwindet. —

Diese Fälle lassen eine wichtige geometrische Interpretation zu. — Denn es sei AB (Fig. 2) eine Curve, deren Gleichung:

$$y = f(x, c_1, c_2),$$

das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\beta = 0$$

ist, und es seien A, B die den Grenzwerthen von x, y entsprechenden Punkte; so ist es in dem ersten der oben erwähnten Fälle offenbar möglich: zwischen A und B eine zweite Curve zu beschreiben, welche der ersten unendlich nahe ist, und derselben Gleichung genügt. — Denn es ist früher gezeigt worden: daß die Curve, deren Gleichung ist:

$$y = f(x, c_1, c_2) + u,$$

der allgemeinen Gleichung:

$$\beta = 0$$

Genüge leistet — und da $u_1 = 0$, $u_0 = 0$ ist; so ist klar, daß diese Curve durch die Punkte A, B geht. —

Im zweiten Falle kann man offenbar durch A und einen zwischen A und B liegenden Punkt C (Fig. 3) eine zweite Curve legen, welche der ersten unendlich nahe kommt und der allgemeinen Differentialgleichung genügt. — Denn setzt man:

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{\left(\frac{dy}{dc_2}\right)_0}{\left(\frac{dy}{dc_1}\right)_0},$$

so hat man offenbar:

$$u_0 = 0,$$

und wenn u für eine zwischen x_0, x_1 liegenden Werth von x verschwindet; so ist, wie in dem ersten Falle, leicht einzusehen: daß es einen zwischen A und B liegenden Punkt C geben muß, in welchem die Curve:

$$y = f(x, c_1, c_2) + u$$

die Curve AB schneidet, so daß es also offenbar möglich ist, die Curve auf die vorhin angegebene Weise zu beschreiben. — Man hat mithin folgende Regel:

Wenn AB die Curve darstellt, deren Differentialgleichung:

$$\beta = 0$$

ist, und welche durch die beiden gegebenen Punkte A, B geht — und man zieht durch A eine zweite, der ersten unendlich nahe liegende Curve, die derselben Differentialgleichung genügt; so schneidet diese zweite Curve die erste in irgend einem andern Punkte C. — Denn aus der vorhergehenden Untersuchung erhellet: daß das betrachtete Integral im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Minimum gestattet, wenn der Punkt C nicht jenseits B fällt. —

48. Als eine Anwendung der vorhergehenden Theorie wollen wir den in Beisp. 1 betrachteten Fall nehmen, wo:

$$V = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

folglich:

$$Q_1 = \frac{d^2 V}{\left(d \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. — Da die Wurzelgröße in V innerhalb der Integrationsgrenzen stets als positiv angenommen wird, so ist klar, daß Q_1 fortwährend

positiv bleiben wird — welches die erste Bedingung für die Existenz eines Minimums ist — und wir wollen nun untersuchen: ob auch die übrigen Bedingungen erfüllt werden? —

Da in diesem Falle das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\beta = 0$$

von der Form ist:

$$y = c_1 x + c_2,$$

so hat man:

$$\frac{dy}{dc_1} = x, \quad \frac{dy}{dc_2} = 1,$$

und folglich:

$$u = C_1 x + C_2, \quad \frac{du}{dx} = C_1.$$

Substituirt man diese Werthe in (*b*), Seite 99, so erhält man:

$$\delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_1^2)^5}} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{C_1}{C_1 x + C_2} \delta y - \frac{d\delta y}{dx} \right)^2 dx,$$

und wenn man für C_1, C_2 solche Werthe annimmt, daß $C_1 x + C_2$ für keinen zwischen x_0, x_1 liegenden Werth von x verschwindet; so ist klar: daß die Größe unter dem Zeichen $\int$ nicht unendlich werden kann. —

Endlich ist leicht einzusehen: daß kein zulässiger Werth von δy die zweite Variation verschwinden macht. — Denn nach dem Obigen ist $\delta y = u$ der einzige Werth von δy, welcher dieser Bedingung genügt, und damit derselbe ein zulässiger Werth sei, muß man haben:

$$u_1 = 0, \quad u_0 = 0.$$

Diese Gleichungen werden aber in dem gegenwärtigen Falle:

$$C x_{11} + C_2 = 0, \quad C_1 x_0 + C_2 = 0,$$

welche für endliche Werthe von C_1, C_2 offenbar unmöglich sind. — Hieraus erhellet also: daß der in Beisp. 1 gefundene Werth für y das gegebene Integral zu einem Minimum macht. —

Dieser Schluß läßt sich auch über den betrachteten individuellen Fall hinaus erstrecken. Denn wenn allgemein:

$$V = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ist, so ist das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\beta = 0$$

nach (a) auf Seite 60 offenbar:

$$y = c_1 x + c_2,$$

und man hat daher wieder wie früher:

$$u = C_1 x + C_2.$$

Hieraus erhellet wieder leicht, wie in der vorhergehenden Nr., daß für C_1, C_2 Werthe gefunden werden können, welche die Größe unter dem Zeichen $\int$ in $\delta^2 U$ für alle zwischen x_0 und x_1 liegende Werthe von x endlich machen, und daß folglich kein zulässiger Werth von δy die zweite Variation $\delta^2 U = 0$ macht.

Da ferner die Größe:

$$Q_1 = \frac{d^2 V}{\left(d \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2 V}{dc_1^{\,2}},$$

also constant ist; so kann sie offenbar ihr Zeichen nicht ändern. — Hieraus, und aus dem Frühern (S. 60) folgt nun:

1) daß jedes Integral von der Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\left(\frac{dy}{dx}\right) dx,$$

welches nicht an und für sich integrabel ist, ein Maximum, oder Minimum gestattet, wenn die Grenzwerthe von x und y fixirt sind. —

2) daß dieses Max. oder Min. gefunden wird, wenn man $\frac{dy}{dx} = c_1$ setzt, und mithin ist:

$$(x_1 - x_0) f(c_1).$$

3) daß in allen andern Fällen das Max. und Min. durch das Zeichen der Größe Q_1, d. h. in diesem Falle, durch das von:

$$\frac{d^2 f(c_1)}{dc_1^{\,2}}$$

unterſchieden werden. —

Da in dem folgenden Kap. noch andere hieher gehörige Beiſpiele vorkommen werden, ſo wird es nicht nöthig ſein, hier noch weitere mitzutheilen. —

49. Es ſei:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

ſo iſt nach Nr. 11:

$$\beta = N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2},$$

und folglich nach Hülfsſ. I:

$$\delta\beta = A\delta y + \frac{d \,.\, A_1 \frac{d\delta y}{dx}}{dx} + \frac{d^2 \,.\, A_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2}}{dx^2}.$$

Bezeichnet man die in dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$\beta = 0$$

vorkommenden willkürlichen Conſtanten mit c_1, c_2, c_3, c_4, und ſetzt:

$$u = C_1 \frac{dy}{dc_1} + C_2 \frac{dy}{dc_2} + C_3 \frac{dy}{dc_3} + C_4 \frac{dy}{dc_4},$$

ſo erhellet wieder wie früher: daß der Gleichung $\delta\beta = 0$ genügt wird, wenn man $\delta y = u$ ſetzt — und daß mithin:

$$u\left(A\delta y + \frac{d \,.\, A_1 \frac{d\delta y}{dx}}{dx} + \frac{d^2 \,.\, A_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2}}{dx^2}\right) dx$$

integrabel iſt. — Setzt man nun wieder:

$$\delta y = u\delta' y,$$

und integrirt theilweiſe, ſo findet man:

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta\beta\delta y\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u\delta\beta\delta' y\,dx = -\int_{x^0}^{x_1} \frac{d\delta' y}{dx}\left(B_1\frac{d\delta' y}{dx} + \frac{d.B_2\frac{d^2\delta' y}{dx^2}}{dx}\right)dx; \quad \text{(c)}$$

indem die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder wieder wie früher an den Grenzen verſchwinden. —

Wenn jetzt C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 neue willkürliche Conſtanten ſind, und man ſetzt:

$$u' = C'_1\frac{dy}{dc_1} + C'_2\frac{dy}{dc_2} + C'_3\frac{dy}{dc_3} + C'_4\frac{dy}{dc_4};$$

ſo iſt leicht einzuſehen: daß die Annahme:

$$\delta' y = \frac{u'}{u}$$

der Gleichung:

$$B_1\frac{d\delta' y}{dx} + \frac{d.B_2\frac{d^2\delta' y}{dx^2}}{dx} = 0. \qquad \text{(d)}$$

genügt. — Denn wegen:

$$\int u\delta\beta\,dx = B_1\frac{d\delta' y}{dx} + \frac{d.B_2\frac{d^2\delta' y}{dx^2}}{dx}$$

iſt klar: daß jeder Werth von δy, welcher der Gleichung $\delta\beta = 0$ genügt, auch der Gleichung (d) genügt. — Aber aus $\delta' y = \frac{u'}{u}$ folgt $\delta y = u'$, und mithin nach Hülff. III: $\delta\beta = 0$. —

Dieſe Annahme genügt alſo der Gleichung (d), und macht folglich den Ausdruck:

$$\frac{d.\left(\frac{u'}{u}\right)}{dx}\left(B_1\frac{d\delta' y}{dx} + \frac{d.B_2\frac{d^2\delta' y}{dx^2}}{dx}\right)dx$$

integrabel. — Verfährt man wieder wie früher, ſetzt:

$$\frac{d\delta' y}{dx} = \frac{d\left(\frac{u'}{u}\right)}{dx}\delta'' y,$$

und integrirt den zweiten Theil der Gleichung (c) theilweiſe; ſo ergibt ſich, weil nach Hülfsſ. II:

$$\int \frac{d\left(\frac{u'}{u}\right)}{dx}\left(B_1\frac{d\delta' y}{dx} + \frac{d.B_2\frac{d^2\delta' y}{dx^2}}{dx}\right)dx = E_1\frac{d\delta'' y}{dx},$$

iſt, endlich:

$$\int_{x_0}^{x_1} d\beta\delta y dx = \int_{x_0}^{x_1} E_1\left(\frac{d\delta'' y}{dx}\right)^2 dx.$$

Die Folgerungen aus dieſer Transformation ſind den im vorhergehenden Falle analog; nämlich:

1) Zum Stattfinden eines Maximums, oder Minimums wird erfordert: daß E_1 innerhalb der Integrationsgrenzen das Zeichen nicht ändert. — Aber wegen:

$$E_1 = \left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2.B_2 = \left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2.u^2A_2 = \left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2\frac{u^2d^2V}{\left(d.\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

iſt klar: daß E_1 daſſelbe Zeichen hat, als:

$$\frac{d^2V}{\left(d.\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = Q_2.$$

Es muß alſo für alle zwiſchen x_0 und x_1 liegenden Werthe von x für das Maximum:

$$Q_2 < 0,$$

und für das Minimum:

$$Q_2 > 0$$

ſein. —

2) Ferner iſt nothwendig: daß die unter dem Zeichen $\int$ ſtehende Größe:

$$E_1\left(\frac{d\delta''y}{dx}\right),$$

für keinen zwiſchen x_0 und x_1 liegenden Werth von x unendlich wird. — Nun iſt aber:

$$\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\delta''y=\frac{d\delta'y}{dx}=\frac{d.\frac{dy}{u}}{dx},$$

und wenn zur Abkürzung $v=\frac{u'}{u}$ geſetzt wird; ſo findet man:

$$\frac{d\delta''y}{dx}=\frac{1}{\frac{dv}{dx}}d^2.\frac{\delta y}{u}-\frac{1}{\frac{dv^2}{dx^2}}\frac{d^2v}{dx^2}\,d.\frac{\delta y}{u}.$$

Durch Subſtitution dieſes Werthes ergibt ſich:

$$\delta^2U=\int_{x_0}^{x_1}Q_2\left(A\delta y+A_1\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2dx,$$

wo:

$$A=\frac{\frac{du}{dx}\frac{d^2u'}{dx^2}-\frac{du'}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}}{u\frac{du'}{dx}-u'\frac{du}{dx}},$$

$$A_1=\frac{u\frac{d^2u'}{dx^2}-u'\frac{d^2u}{dx^2}}{u\frac{du'}{dx}-u'\frac{du}{dx}}$$

geſetzt iſt. — Es findet alſo in dieſem Falle ein Maximum ſtatt, wenn:

1) $Q_2<0$,

2) $Q_2\left(A\delta y+A_1\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d^2dy}{dx^2}\right)^2$ nicht $=\infty$, } für alle zwiſchen x_0 und x_1 liegenden Werthe von x,

3) $A\delta y+A_1\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d^2\delta y}{dx^2}=0$ unmöglich iſt für jeden zuläſſigen Werth von δy; und ein Minimum, wenn:

1) $Q_2 > 0$ für alle zwiſchen x_0 und x_1 liegende Werthe von x,
2) } wie vorhin.
3) }

Wenn nun das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\beta = 0$$

bekannt iſt, ſo ſind auch die Größen u, u' als Functionen von x und willkürlichen Conſtanten bekannt — und wenn man aus dieſen Werthen die von A, A_1 ableitet; ſo erhellet unmittelbar: ob dieſe Bedingungen erfüllt werden, oder nicht. —

Wenn z. B. die Gleichung:

$$A\delta y + A_1 \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

durch irgend einen zuläſſigen Werth von dy erfüllt wird, ſo iſt leicht einzuſehen, daß, wenn AB (Fig. 3) die durch die Gleichung:

$$\beta = 0$$

ausgedrückte Curve iſt, für welche an den Punkten A, B die Grenzwerthe von x, y $\frac{dy}{dx}$ ſtattfinden, eine zweite, der erſten unendlich nahe Curve beſchrieben werden kann, welche derſelben Differentialgleichung genügt, und die Curve AB in den Punkten A, B berührt. — Denn wie im vorhergehenden Falle erhellet leicht, daß $\delta y = u$ das allgemeine Integral von:

$$A\delta y + A_1 \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

iſt — und wenn dies ein zuläſſiger Werth von δy iſt; ſo muß:

$$u_1 = 0,\quad u_0 = 0, \left(\frac{du}{dx}\right)_1 = 0,\quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 0 \qquad \text{(c)}$$

ſein. — Aber die Gleichung einer der Curve AB unendlich nahen, und derſelben Differentialgleichung genügenden Curve iſt offenbar von der Form:

$$y' = y + u,$$

wo y die Ordinate der Curve AB ist; und wenn u den vier Gleichungen (c) genügt, so berührt diese zweite Curve offenbar die Curve AB in den Punkten A, B. —

Endlich läßt sich, wie in dem vorhergehenden Falle, leicht zeigen: daß das betrachtete Integral weder ein Maximum, noch ein Minimum gestattet, wenn durch A und einen zwischen A und B liegenden Punkt eine solche zweite Curve gelegt werden kann. —

51. Als ein Anwendungsbeispiel der vorhergehenden Theorie sei:

$$V=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^m,$$

und die Function y so zu bestimmen, daß das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

ein Max. oder Min. wird, wenn die Grenzwerthe von x, y und $\frac{dy}{dx}$ gegeben sind. —

In diesem Falle ist:

$$N=0, \quad P_1=0, \quad P_2=m\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{m-1}.$$

und die Gleichung $\beta=0$ wird folglich:

$$\frac{d^2P_2}{dx^2}=0,$$

oder wenn man zweimal nach einander integrirt und für P_2 seinen Werth setzt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(ax+b)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Hieraus ergibt sich leicht als vollständiges Integral:

$$y=(c_1x+c_2)^{\frac{2m-1}{m-1}}+c_3x+c_4, \qquad \text{(a)}$$

und folglich:

$$Q_2 = m \,.\, m-1 \,.\, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{m-2} = m \,.\, m-1 \,.\, (ax+b)^{\frac{m-2}{m-1}},$$

wo m eine ganze Zahl ſein mag. — Wenn nun m gerade iſt, ſo iſt der Factor:

$$(ax+b)^{\frac{m-2}{m-1}}$$

ſtets poſitiv — und wenn m ungerade iſt; ſo iſt dieſer Factor poſitiv, oder negativ, jenachdem man das obere, oder das untere Zeichen der Wurzelgröße:

$$\pm (ax+b)^{\frac{1}{m-1}}$$

nimmt. Aber in keinem dieſer Fälle kann Q_2 das Zeichen wechſeln. — Der andere Factor $m(m-1)$ iſt offenbar immer poſitiv, weil m eine von der Einheit verſchiedene ganze Zahl iſt. — Nimmt man auch das negative Zeichen von:

$$\pm (ax+b)^{\frac{1}{m-1}},$$

ſo wird blos $\frac{d^2y}{dx^2}$, und folglich V negativ — und wenn man unter einem Minimum den Werth verſteht, welcher der Null am nächſten kommt; ſo iſt der hier gefundene Werth in allen Fällen ein Minimum. —

Wir wollen nun ſehen, ob auch die übrigen nothwendigen Bedingungen erfüllt werden. — Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{2m-1}{m-1} = n,$$

und differenzirt die Gleichung (a) nach den darin vorkommenden Conſtanten; ſo erhält man:

$$\frac{dy}{dc_1} = n(c_1x+c_2)^{n-1}x, \quad \frac{dy}{dc_2} = n(c_1x+c_2)^{n-1},$$

$$\frac{dy}{dc_3} = x, \quad \frac{dy}{dc_4} = 1;$$

folglich:

$$u = n(c_1 x + c_2)^{n-1}(C_1 x + C_2) + C_3 x + C_4,$$

und ebenso:

$$u' = n(c_1 x + c_2)^{n-1}(C'_1 x + C'_2) + C'_3 x + C'_4.$$

Setzt man nun:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C'_1 = 0, \quad C'_2 = 0,$$

so wird die zweite Variation:

$$\delta^2 U = \int_{x_0}^{x_1} Q_2 \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Hieraus sieht man, daß die in $\delta^2 U$ unter dem Zeichen $\int$ stehende Größe stets endlich bleibt, wenn Q_2 nicht unendlich wird zwischen den Grenzen x_0 und x_1. — Nach dem Obigen ist aber:

$$Q_2 = m \,.\, m - 1 \,.\, (ax + b)^{\frac{m-2}{m-1}},$$

und da m nach der Voraussetzung eine ganze Zahl und > 1 ist; so kann der Exponent:

$$\frac{m-2}{m-1}$$

offenbar nicht negativ, und mithin Q_2 für keinen endlichen Werth von x unendlich werden. —

Es bleibt nun noch zu untersuchen: ob für irgend eine zulässige Form von δy die zweite Variation $\delta^2 U = 0$ werden kann? — Nun haben wir aber gesehen, daß $\delta y = u$ die allgemeinste Form ist, welche $\delta^2 U = 0$ machen kann — und wenn dies ein zulässiger Werth von dy sein soll; so müssen sich die in u vorkommenden arbiträren Constanten so bestimmen lassen, daß den Gleichungen:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_1 = 0. \qquad (b)$$

Genüge geschieht. —

Setzen wir:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0,$$

ſo wird das allgemeine Integral auf:

$$y = (ax + b)^n - nab^{n-1}x - b^n \qquad \text{(c)}$$

reducirt, wo a, b reſp. für c_1, c_2 geſetzt iſt. — Hieraus folgt weiter:

$$u = n(ax + b)^{n-1}(C_1 x + C_2) + C_3 x + C_4,$$

$$\frac{du}{dx} = nC_1(ax+b)^{n-1} + n\,.\,n-1\,.(C_1 x + C_2)(ax+b)^{n-2}a + C_3,$$

und die vier Bedingungen (b) geben mithin:

$$nb^{n-1}C_2 + C_4 = 0;$$
$$nC_1 b^{n-1} + n\,.\,n-1\,.\,C_2 b^{n-2}a + C_3 = 0;$$
$$n(ax_1 + b)^{n-1}C_1 x_1 + C_2) + C_3 x_1 + C_4 = 0;$$
$$nC_1(ax_1 + b^{n-1} + n\,.\,n-1\,.(C_1 x_1 + C_2)(ax_1 + b)^{n-2}a + C_3 = 0.$$

Eliminirt man die Größen:

$$\frac{C_2}{C_1},\ \frac{C_3}{C_1},\ \frac{C_4}{C_1},\ a,\ b,$$

zwiſchen dieſen Gleichungen und den beiden folgenden:

$$y_1 = (ax_1 + b)^n - nab^{n-1}x_1 - b^n,$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = na(ax_1 + b)^{n-1} - nab^{n-1}, \qquad \text{(d)}$$

welche ſich durch Subſtitution der gegebenen Grenzwerthe:

$$x_1,\ y_1,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1,$$

in die Gleichheit (c) und deren erſten Differentialquotiention ergeben; ſo kommt man zuletzt auf eine Gleichung, welche nur dieſe Grenzwerthe enthält. — Wird alsdann dieſe Gleichung durch dieſe Grenzwerthe, oder durch irgend ein anderes, zwiſchen den Integrationsgrenzen liegendes Werthesſyſtem von:

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},$$

erfüllt; so gestattet das betrachtete Integral im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Minimum. —

52. Die Aufgabe läßt sich durch geometrische Betrachtungen wie die frühern (S. 110) vielleicht noch etwas einfacher behandeln. — Denn wir haben dort gesehen, daß, wenn $\delta^2 U = 0$ gemacht werden kann, zwischen den Endpunkten A, B (Fig. 3) eine zweite Curve beschrieben werden kann, welche der ersten unendlich nahe kommt, derselben allgemeinen Gleichung genügt und dieselben Grenzwerthe von $\frac{dy}{dx}$ hat. — Wenn die Grenzpunkte dieser Bedingung genügen, so hat man offenbar die vier Gleichungen:

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_0 + \left(\frac{dy}{db}\right)_0 \frac{db}{da} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)_0 + \left(\frac{d^2y}{dxdb}\right)_0 \frac{db}{da} = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_1 + \left(\frac{dy}{db}\right)_1 \frac{db}{da} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)_1 + \left(\frac{d^2y}{dxdb}\right)_1 \frac{db}{da}\Big)_1 = 0,$$

und wenn man die aus der Gleichung (c) abgeleiteten Werthe dieser Differenzialquotienten substituirt; so ist leicht einzusehen, daß die beiden ersten dieser vier Gleichungen identisch werden, wie es auch sein muß. — Die beiden letzten aber werden:

$$\{(ax_1+b)^{n+1} - b^{n-1}\}x_1 + \{(ax_1+b)^{n-1} - b^{n-1} - (n-1)ab^{n-2}x_1\}\frac{db}{da} = 0,$$

$$(ax+b)^{n-1} - b^{n-1} + (n-1)(ax_1+b)^{n-2}ax_1$$
$$+ (n-1)a\{(ax_1+b)^{n-2} - b^{n-2}\}\frac{db}{da} = 0.$$

Eliminirt man $\frac{db}{da}$ zwischen diesen beiden letzten Gleichungen und reducirt, so erhält man:

$$\{(ax_1+b)^{n-1} - b^{n-1}\}^2 = (n-1)^2 a^2 x_1^2 (ax_1+b)^{n-2} b^{n-2}, \quad \text{(e)}$$

und wenn man a, b zwischen den Gleichungen (e) und (d) eliminirt; so findet man wieder eine Gleichung zwischen:

$$x_1,\ y_1,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1.$$

Wenn dieſe Gleichung durch dieſe Werthe, oder durch irgend ein andres Werthesyſtem von x, y, $\frac{dy}{dx}$, welches innerhalb der Integrationsgrenzen liegt, verificirt wird; ſo ſchließen wir wieder: daß das betrachtete Integral weder ein Max. noch ein Min. haben kann. —

Wenn z. B.:

$$m=2,\quad n=\frac{2m-1}{m-1}=3$$

iſt, ſo wird die Gleichung (e) in dieſem Falle:

$$\{(ax_1+b)^2-b^2\}^2=4a^2x_1^2\,(ax_1+b)b,$$

oder reducirt:

$$a^4x_1^4;$$

alſo $a=0$, weil x_1 nicht $=0$ ſein kann, und (c) reducirt ſich auf: $y_1=0$, ſo daß es in dem gegenwärtigen Falle nicht möglich iſt, eine Curve von der zu Anfang dieſer Nr. bezeichneten Beſchaffenheit zu beſchreiben. — Wir ſchließen hieraus wieder: daß der Werth des gegebenen Integrales ein wirkliches Minimum iſt. —

53. Da die Art der Anwendung der Jacobi'ſchen Theorie auf Functionen mit Differentialquotienten von einer höhern, als der zweiten Ordnung der im Vorhergehenden umſtändlich auseinandergeſetzten ganz ähnlich iſt; ſo werden einige allgemeine Andeutungen hier genügen:

1) Da die zweite Variation im Allgemeinen die Form hat:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(A\delta y+\frac{d\,.\,A_1\frac{d\delta y}{dx}}{dx}+\&c.+\frac{d^n\,.\,A^n\frac{d^n\,dy}{dx^n}}{dx^n}\right)dx,$$

ſo ſetzt man wieder:

$$u = C_1 \frac{dy}{dc_1} + C_2 \frac{dy}{dc_2} + \text{&c.} + C_{2n} \frac{dy}{dc_{2n}},$$

$$\delta y = u\delta' y,$$

und durch theilweiſe Integration ergibt ſich:

$$\delta^2 U = -\int_{x_0}^{x_1} \left(B_1 \frac{d\delta' y}{dx} + \text{&c.} + \frac{d^{n-1} \cdot B_n \dfrac{d^n \delta' y}{dx^n}}{dx^{n-1}} \right) \frac{d\delta' y}{dx}\, dx.$$

2) Man ſetzt weiter:

$$u' = C'_1 \frac{dy}{dc_1} + C'_2 \frac{dy}{dc_2} + \text{&c.} + C'_{2n} \frac{dy}{dc_{2n}},$$

$$\frac{d\delta' y}{dx} = \frac{d \cdot \dfrac{u'}{u}}{dx}\, \delta'' y,$$

und integrirt theilweiſe. —

3) Man ſetzt der Kürze wegen:

$$v = \frac{d \cdot \dfrac{u'}{u}}{dx},$$

bezeichnet mit v' eine Größe, welche ebenſo aus v gebildet iſt, wie u' aus u, d. h. durch eine Aenderung der darin vorkommenden arbiträren Conſtanten, ſetzt ferner:

$$\frac{d\delta'' y}{dx} = \frac{d \cdot \dfrac{v'}{v}}{dx}\, \delta''' y,$$

integrirt theilweiſe, und fährt auf ähnliche Weiſe fort, bis die zweite Variation auf die Form:

$$\pm \int_{x_0}^{x_1} E_n \left(\frac{d\delta^{(n)} y}{dx} \right)^2 dx,$$

gebracht iſt, indem das obere, oder untere genommen wird, jenachdem n gerade, oder ungerade iſt. —

4) Nach Hülfsſ. I und II iſt klar: daß dieſe Größe daſſelbe

Zeichen hat, wie Q_n. — Denn aus der Schlußbemerkung zu Hülfsſ. I erhellet, daß:

$$B^n = A_n u^2$$

iſt, und wenn D_n der Coefficient von:

$$\frac{d^{n-1}\delta''y}{dx^{n-1}}$$

in der Größe iſt, welche nach der nächſten Integration bleibt; ſo hat man:

$$D_n = B_n\left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2 = A^n u^2\left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2;$$

und endlich:

$$E_n = A_n u^2\left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2 \ldots\ldots$$

Nach Hülfsſ. I iſt aber:

$$A_n = \pm Q_n,$$

und mithin wird die zweite Variation in allen Fällen auf die Form:

$$\int_0^{x_1} Q_n u^2\left(\frac{d.\frac{u'}{u}}{dx}\right)^2 \ldots \left(\frac{d\delta^{(n)}y}{dx}\right)^2$$

gebracht — woraus erhellet: daß, wie in den frühern Fällen, für das Maximum:

$$Q_n < 0$$

und für das Minimum:

$$Q_n > 0$$

ſein muß für alle Werthe des x von x_0 bis x_1. —

5) Man ſieht leicht ein, daß die Form, auf welche $\delta^2 U$ gebracht iſt, mit der in Nr. 40 angegebenen identiſch iſt; denn man hat:

$$\delta' y = \frac{\delta y}{u},$$

$$\frac{d\delta' y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{u}\right).$$

$$\frac{d\delta'' y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\frac{d\delta' y}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{v}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{u}\right)\right\},$$

$$\frac{d\delta''' y}{dx} = \text{\&c.}$$

&c. &c. &c.,

und wenn dieſe verſchiedenen Differentionen wirklich ausgeführt werden, ſo leuchtet die Behauptung ſofort ein. —

6) Wenn A, B die gegebenen Endpunkte der Curve ſind, welche den verſchiedenen Bedingungen der Aufgabe genügt, ſo geſtattet das betrachtete Integral im Allgemeinen weder ein Max., noch ein Min., wenn zwiſchen A und B zwei ſolche Punkte C, D gefunden werden können: daß eine zweite durch dieſelben gehende Curve der erſten unendlich nahe kommt, derſelben Differentialgleichung genügt und in den Punkten C, D dieſelben Werthe von:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \cdots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

hat, wie die erſte —

7) Da die Beſtimmung der Curve, welche allen Bedingungen der Aufgabe genügt, von der Auflöſung eines Syſtemes von Gleichungen abhängt, welche durch die Subſtitution der Grenzwerthe von x, y $\frac{dy}{dx}$, ... in die Gleichung:

$$\beta = 0$$

erhalten werden; ſo leuchtet ein: daß es im Allgemeinen mehr als eine ſolche Curve geben wird — und wenn zwei ſolcher Curven zuſammenfallen, d. h. die Gleichungen, welche ſie beſtimmen, eine, oder mehrere gleiche Wurzeln haben; ſo erhellet aus 6), daß das betrachtete Integral weder ein Max., noch ein Min. geſtattet. —

Aufgabe VI.

53. Man ſoll die Functionen y, z von x beſtimmen, welche das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

zu einem Maximum, oder Minimum machen, wenn:

$$V = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\ \ldots\ \frac{d^n y}{dx^n},\ z,\ \frac{dz}{dx}\ \ldots\ \frac{d^m z}{dx^m}\right)$$

iſt. —

Auflöſung. Die Gleichung:

$$DU = 0$$

wird in dieſem Falle nach Kap. 2 Aufg. V:

$$\begin{aligned}
&V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 \delta y_0, \\
&+ (P_2 - \&c.)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 - \&c.)_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \\
&\qquad + \&c. \qquad\qquad (A) \\
&+ \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1 - \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_0 \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n}\right) \delta y dx \\
&+ \left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \&c.\right)_1 \delta z_1 - \left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \&c.\right)_0 \delta z_0 \\
&+ (P'_2 - \&c.)_1 \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1 - (P'_2 - \&c.)_0 \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0 \\
&\qquad + \&c. \\
&+ \left(P'_m \frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_1 - \left(P'_m \frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_0 \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N' - \frac{dP'_1}{dx} + \frac{d^2 P'_1}{dx^2} - \&c. + (-1)^m \right) \frac{d^m P'_m}{dx^m} \delta z dx \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Wenn die Functionen y, z von einander unabhängig sind, so sind es ihre Variationen δy, δz auch, und wie in Aufg. II erhellet: daß man jetzt die beiden allgemeinen Gleichungen:

$$\begin{aligned} N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \text{\&c.} + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0, \\ N' - \frac{dP'_1}{dx} + \frac{d^2P'_2}{dx^2} - \text{\&c.} + (-1)^m \frac{d^m P'_m}{dx^m} = 0, \end{aligned} \tag{B}$$

so wie die Grenzgleichung:

$$\begin{aligned} V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \left(P_1 - \frac{dP_1}{dx} + \text{\&c.}\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \text{\&c.}\right)_0 \delta y_0 \\ + (P_2 - \text{\&c.})_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - (P_2 - \text{\&c.})_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \\ + \text{\&c.} \\ + \left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \text{\&c.}\right)_1 \delta z_1 - \left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \text{\&c}\right)_0 \delta z_0 \\ + (P'_2 - \text{\&c.})_1 \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1 - (P'_2 - \text{\&c.})_0 \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0 \\ + \text{\&c.} = 0, \end{aligned} \tag{C}$$

haben muß. —

Die Behandlungsweise dieser Gleichungen ist der in Aufg. II ganz analog, und aus ähnlichen Betrachtungen, wie die dort angestellten, ergibt sich schließlich: daß die Anzahl der Gleichungen durch die Einführung irgend welcher Hülfsgleichungen nicht geändert wird. — Denn jede solche Hülfsgleichung entfernt aus (C) entweder ein Glied, indem die in diesem Gliede vorkommende Variation verschwindet, oder es werden zwei Glieder in eins vereinigt, so daß die Anzahl die Gleichungen, welche (C) äquivalent ist, immer um eine Einheit vermindert wird; aber gleichzeitig wird diese Anzahl durch diese Hülfsgleichung selbst um eine Einheit wieder vermehrt; folglich ꝛc. —

Um nun darzuthun, daß (B) und (C) immer die zur vollständigen Lösung der Aufgabe hinreichende Anzahl von Gleichungen lie-

fern, braucht dieſes nur für einen einzelnen Fall, z B. den, wo nur die Grenzwerthe von x fixirt ſind, gezeigt zu werden. —

Nun iſt aber leicht einzuſehen, daß die Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0$$

in Bezug auf die Differentialquotienten von y und z reſp. von der $2n$ten und $(m+n)$ten Ordnung iſt — und die Gleichung:

$$N' - \frac{dP'_1}{dx} + \&c. + (-1) \frac{d^m P'_m}{dx^m} = 0$$

reſp. von der $(m+n)$ten und $2m$ten Ordnung. — Dieſe Gleichungen ſind daher von der Form:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}, z, \frac{dz}{dx} \ldots \frac{d^{m+n}z}{dx^{m+n}}\right) = 0,$$

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}, z, \frac{dz}{dx} \ldots \left(\frac{d^{2m}z}{dx^{2m}}\right)\right) = 0.$$

Wenn man nach der gewöhnlichen Methode die erſte $2m$ mal und die zweite $(m+n)$ mal differenzirt, ſo erhält man $3n+n+2$ Gleichungen, und wenn zwiſchen dieſen Gleichungen die Größen:

$$z, \frac{dz}{dx} \ldots \frac{d^{3m+n}z}{dx^{3m+n}},$$

eliminirt werden; ſo iſt die reſultirende Gleichung in Bezug auf y von der $2(m+n)$ten Ordnung, und das allgemeine Integral derſelben enthält $2(m+n)$ arbiträre Conſtanten. — Offenbar hat man $2(m+n)$ Grenzgleichungen, nämlich die $2n$ Gleichungen:

$$\left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_0 = 0, \quad \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \&c.\right)_1 = 0,$$

$$(P_2 - \&c.)_0 = 0, \quad (P_2 - \&c.)_1 = 0,$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

$$(P_n)_0 = 0, \qquad (P_n)_1 = 0;$$

und die $2m$ Gleichungen:

$$\left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \&c.\right)_0 = 0, \quad \left(P'_1 - \frac{dP'_2}{dx} + \&c.\right)_1 = 0,$$

$$(P'_2 - \&c.)_0 = 0, \qquad (P'_2 - \&c.)_1 = 0,$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

$$(P'^m)_0 = 0, \qquad (P'_m)_1 = 0.$$

Die Aufgabe ist daher im Allgemeinen völlig bestimmt; nur können ähnliche Ausnahmen vorkommen, wie die früher für den Fall einer unabhängigen Function y angeführten. — Wenn z. B. $N=0$ und keiner der Grenzwerthe von y gegeben ist, so ist die Aufgabe unbestimmt, was ganz auf die frühere Weise nachgewiesen wird. —

54. Wenn V die Independente x nicht explicite enthält, so kann man eine Gleichung von der $[2(m+n)-1]$ten Ordnung erhalten, ohne die Form von V näher zu bestimmen. —

Denn da alsdann $M=0$ ist, so hat man:

$$dV = Ndy + P_1 d.\frac{dy}{dx} + P_2 d.\frac{d^2y}{dx^2} + \&c. + P_n d.\frac{d^n y}{dx^n}$$

$$+ N'dz + P'_1 d.\frac{dz}{dx} + P'_2 d.\frac{d^2z}{dx^2} + \&c. + P'_m d.\frac{d^m z}{dx^m}.$$

Substituirt man weiter für N und N' ihre aus den Gleichungen:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0,$$

$$N' - \frac{dP'_1}{dx} + \&c. = 0$$

abgeleiteten Werthe, und verfährt genau wie in Nr. 29; so findet man:

$$V = c + P_1\frac{dy}{dx} + \left(P_2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dP_2}{dx}\right) + \&c.$$

$$+ P'_1\frac{dz}{dx} + \left(P'_2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dP'_2}{dx}\right) + \&c.$$

Eine weitere Aufzählung der etwa vorkommenden Ausnahmsfälle ist offenbar unnöthig. —

Beiſpiel.

55. Man ſoll die Formen der Functionen y und z finden, bei welchen das Integral:

$$\int V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)dx$$

ein Maximum, oder Minimum wird. —

Auflöſung. Hier iſt:

$$N=0, \quad N'=0,$$

$$P_1=\frac{\frac{dy}{dx}}{V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}, \quad P'_1=\frac{\frac{dz}{dx}}{V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)},$$

$$P_2=0, \text{ \&c.} \qquad P'_2=0, \text{ \&c.},$$

und die Gleichungen:

$$N-\frac{dP_1}{dx}+\text{\&c.}=0, \quad N'-\frac{dP'_1}{dx}+\text{\&c.}=0$$

werden daher:

$$\frac{dP_1}{dx}=0, \quad \frac{dP'_1}{dx}=0,$$

oder:

$$P_1=\frac{\frac{dy}{dx}}{V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}=c, \quad P'_1=\frac{\frac{dz}{dx}}{V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}=c'.$$

Wenn man dieſe Gleichungen für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ auflöſ't, ſo erhält man offenbar Reſultate von der Form:

$$\frac{dy}{dx}=m, \quad \frac{dz}{dx}=n;$$

alſo endlich:

$$y = mx + p, \quad z + nx + q.$$

Es ſind nun noch die Conſtanten in den verſchiedenen Fällen zu beſtimmen:

1) Wenn die Grenzwerthe von x, y, z gegeben ſind, ſo werden die Conſtanten m, n p, q durch die vier Gleichungen:

$$y_1 = mx_1 + p, \qquad z_1 = nx_1 + q,$$

$$y_0 = mx_0 + p, \qquad z_0 = nx_0 + q$$

beſtimmt. —

2) Wenn nur die Grenzwerthe von x gegeben ſind, während die von y und z unbeſtimmt bleiben; ſo geben die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder offenbar die Gleichungen:

$$(P_1)_1 = 0, \qquad (P'_1)_1 = 0,$$

$$(P_1)_0 = 0, \qquad (P'_1)_0 = 0,$$

welche jedoch nur mit den Gleichungen $m = 0$, $n = 0$ gleichbedeutend ſind, ſo daß die beiden andern Conſtanten p, q unbeſtimmt bleiben. — Dieſer Fall iſt dem in Nr. 28, (2) analog. —

3) Wenn die Grenzwerthe von x, y, z durch die Gleichungen:

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad f_0(x_0, y_0, z_0) = 0$$

verknüpft ſind, ſo ſind die Totalincremente derſelben nach (4) in Nr. 27:

$$\left(\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_1}{dx_1}\frac{dz_1}{dx_1}\right)dx_1 + \frac{df_1}{dy_1}\delta y_1 + \frac{df_1}{dz_1}\delta z_1 = 0,$$

$$\left(\frac{df_0}{dx_0} + \frac{df_0}{dy_0}\frac{dy_0}{dz_0} + \frac{df_0}{dz_0}\frac{dz_0}{dx_0}\right)dx_0 + \frac{df_0}{dy_0}\delta y_0 + \frac{df_0}{dz_0}\delta z_0 = 0. \qquad (a)$$

Setzt man nun:

$$m_1 = \frac{\dfrac{df_1}{dy_1}}{\dfrac{df_1}{dx_1}}, \qquad m_0 = \frac{\dfrac{df_0}{dy_0}}{\dfrac{df_0}{dx_0}},$$

$$n_1 = \frac{\frac{df_1}{dz_1}}{\frac{df_1}{dx_1}}, \qquad n_0 = \frac{\frac{df_0}{dz_0}}{\frac{df_0}{dx_0}},$$

und ſubſtituirt für:

$$\frac{dy_1}{dx_1}, \quad \frac{dy_0}{dx_0}, \quad \frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{dz_0}{dx_0}$$

ihre aus den Gleichungen (a) hergeleiteten Werthe; ſo erhält man:

$$(1 + mm_1 + nn_1)\, dx_1 + m_1 \delta y_1 + n_1 \delta z_1 = 0,$$

$$(1 + mm_0 + nn_0)\, dx_0 + m_0 \delta y_0 + n_0 \delta z_0 = 0.$$

Wenn man ferner dx_1, dx_0 mittelſt dieſer beiden letzten Gleichungen aus den Gleichungen:

$$V_1 dx_1 + (P_1)_1\, \delta y_1 + (P'_1)_1\, \delta z_1 = 0,$$

$$V_0 dx_0 + (P_1)_0\, \delta y_0 + (P'_0)_0\, \delta z_0 = 0$$

eliminirt, und die Coefficienten der Variationen:

$$\delta y_1,\ \delta z_1,\ \delta y_0,\ \delta z_0,$$

einzeln $= 0$ ſetzt; ſo findet man:

$$m_1 V_1 - (P_1)_1 (1 + mm_1 + nn_1) = 0,$$

$$n_1 V_1 - (P'_1)_1 (1 + mm_1 + nn_1) = 0,$$

$$m_0 V_0 - (P_1)_0 (1 + mm_0 + nn_0) = 0,$$

$$n_0 V_0 - (P'_1)_0 (1 + mm_0 + nn_0) = 0.$$

Setzt man nun für V_1, $(P_1)_1$ $(P'_1)_1$ ihre Werthe in die beiden erſten dieſer vier Gleichungen und löſ't dieſelben für m und n auf; ſo findet man leicht:

$$m = m_1, \qquad n = n_1, \tag{b}$$

und ebenſo ergibt ſich aus den beiden letzten durch Subſtitution der Werthe von V_0, $(P_1)_0$, $(P'_1)_0$:

$$m = m_0, \qquad n = n_0. \tag{c}$$

Eliminirt man endlich x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0 mittelſt der Gleichungen:

$$y_1 = mx_1 + p, \qquad y_0 = mx_0 + p,$$
$$z_1 = nx_1 + q, \qquad z_0 = nx_0 = q,$$
$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad f_0(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

ſo erhält man vier Gleichungen zur Beſtimmung der vier Unbekannten m, n, p, q. —

56. Wir wollen nun die in Nr. 29 gemachte Bemerkung auf den Fall ausdehnen, wo V zwei, oder mehrere primitive oder unabhängige Functionen $y, z, \ldots$ der Independenten x enthält — und z. B. den Fall betrachten, wo:

$$V = f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{du}\right)$$

iſt, und die Formen der Functionen y, z ſo beſtimmt werden ſollen, daß das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

ein Max., oder ein Min. wird. —

Die Gleichungen:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0, \quad N' - \frac{dP'_1}{dx} + \&c. = 0$$

werden in dieſem Falle:

$$\frac{dP_1}{dx} = 0, \quad \frac{dP'_1}{dx} = 0;$$

folglich:

$$P_1 = c, \qquad P'_1 = c'.$$

Da aber V, und mithin auch P_1, P'_1 nur Functionen von:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx}$$

ſind; ſo iſt klar, daß dieſe Gleichungen gleichbedeutend ſind mit:

$$\frac{dy}{dx} = m, \quad \frac{dz}{dx} = n;$$

folglich:

$$y = mx + p, \quad z = nx + q.$$

Wenn V alſo blos die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ... der erſten Ordnung der unabhängigen oder primitiven Functionen y, z... enthält; ſo wird das betrachtete Integral zu einem Max. oder Min. gemacht, wenn man für y, z... lineare Functionen der Independenten x nimmt. —

Wenn:

$$V = f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^m z}{dx^m}, \ldots\right)$$

iſt, d. h. nur einen Differentialquotienten jeder unabhängigen Function enthält; ſo iſt leicht erſichtlich, daß die Auflöſung durch das Syſtem der Differenzialgleichungen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X, \quad \frac{d^m z}{dx^m} = X', \text{ &c.}$$

gegeben wird, wo X, X', ... gegebene Functionen von x ſind. —

Aufgabe VII.

57. Die Formen der Functionen y, z ſo zu beſtimmen, daß das Integral:

$$\int_0^{x_1} V dx$$

ein Maximum, oder Minimum wird, wenn V von derſelben Form, wie in der vorhergehenden Aufg. iſt, und die Functionen y, z durch die Gleichung:

$$L = 0$$

verknüpft ſind. —

Aufl. Wenn die Gleichung:

$$L = 0$$

in Bezug auf irgend eine der Functionen y, z integrabel iſt, ſo daß ſie eine Gleichung von der Form:

$$z = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \text{ &c.}\right)$$

liefert; ſo hat das gegebene Integral, und folglich auch deſſen Variation nach Kap. 2 Aufg. VI dieſelbe Form, wie in Aufg. III deſſelben Kapitels. In dieſem Falle iſt alſo die jetzige Aufgabe von Aufg. II in keiner Beziehung verſchieden. — Da es aber im Allgemeinen nicht möglich iſt, dieſe Integration zu verrichten, ſo ſind wir genöthigt, die Auflöſung der gegenwärtigen Aufgabe nach der ſchon in Nr. 16 theilweiſe erörterten Lagrange'ſchen Methode zu bewerkſtelligen. — Das Weſen dieſer Methode beſteht nach Nr. 16 darin: daß man eine neue unbeſtimmte Größe λ einführt, durch deren ſchickliche Beſtimmung die Variation des betrachteten Integrales auf eine ſolche Form gebracht werden kann, daß nur eine der willkürlichen Variationen δy, oder δx unter dem Zeichen $\int$ vorkommt. —

Wenn $\ominus$ das Aggregat der Glieder von δU bezeichnet, welche außerhalb des Integralzeichens ſtehen; ſo gibt die allgemeine Formel auf S. 25:

$$\delta U = \ominus + \int_{x_0}^{x_1} \left(N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. \right) \delta y dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N' + \lambda\alpha' - \frac{d(P'_1 + \lambda\beta')}{dx} + \&c. \right) \delta z dx,$$

und wenn man die unbeſtimmte Größe λ ſo annimmt, daß der Gleichung:

$$N' + \lambda\alpha' - \frac{d(P'_1 + \lambda\beta'}{dx} + \&c. = 0$$

Genüge geſchieht; ſo ergibt ſich durch ähnliche Schlüſſe, wie die in Aufg. II, daß die Gleichung:

$$\delta U = 0$$

oder: $$\ominus + \int_{x_0}^{x_1} \left(N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. \right) \delta y dx = 0,$$

ohne Beſchränkung der Variation δy nicht anders erfüllt werden kann, als wenn man ſetzt:

$$\ominus = 0,$$

und: $$N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. = 0.$$

Wir haben demnach zur Löſung unſerer Aufgabe die drei allgemeinen Gleichungen:

$$L = 0,$$

$$N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. = 0,$$

$$N' + \lambda\alpha' - \frac{d(P'_1 + \lambda\beta')}{dx} + \&c. = 0,$$

alſo ebenſoviele Gleichungen, als unbekannte Größen y, z, λ. —

58. Das ganze Verfahren läßt ſich auch wie folgt darſtellen: Der allgemeine Ausdruck von δV iſt:

$$\delta V = N\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + \&c. + N'\delta z + P'_1 \frac{d\delta z}{dx} + \&c.,$$

alſo derſelbe, als wenn y und z unabhängig von einander wären. — Das Mangelhafte dieſes Ausdruckes, in ſeiner jetzigen Form, beſteht offenbar darin: daß δy und δz nicht als independente Variationen behandelt werden können, und mithin die Regeln der vorhergehenden Aufgabe nicht anwendbar ſind. — Der Ausdruck von δV muß alſo zunächſt eine ſolche Modification erleiden, daß δz und δy als unabhängig von einander betrachtet werden können. — Da aber die Gleichung, durch welche δy und δz mit einander verbunden ſind, nämlich:

$$\alpha\delta y + \beta \frac{d\delta y}{dx} + \&c. + \alpha'\delta z + \beta' \frac{d\delta z}{dx} + \&c. = 0,$$

eine lineare iſt, ſo folgt aus der Theorie ſolcher Gleichungen: daß die Bedingung, welche ſie ausdrückt, erfüllt wird, wenn ihre linke Seite durch eine unbeſtimmte Größe λ multiplicirt und das Produkt zu δV addirt wird, und endlich δy, δz als unabhängig von einander behandelt werden. —

Hierdurch ergibt ſich offenbar wieder:

$$N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. = 0,$$

$$N' + \lambda\alpha' - \frac{d(P'_1 + \lambda\beta')}{dx} + \&c. = 0,$$

welche Gleichungen in Verbindung mit $L = 0$ zur Bestimmung von y, z, λ als Functionen von x und arbiträren Constanten hinreichend sind. —

Zur Bestimmung dieser Constanten dienen wieder die verschiedenen Gleichungen, welche erhalten werden, wenn man in den außerhalb des Zeichens $\int$ stehenden Gliedern die Coefficienten von δy_1, δz_1, δy_0, δz_0; $\ldots = 0$ setzt, wodurch man so viele Gleichungen erhält, als **independente** Variationen vorkommen. — Da aber die Gleichung:

$$L = 0$$

zwischen y und z stattfinden soll, wie diese Functionen auch variiren mögen; so sind die Variationen δy_1, δz_1, $\ldots$ δy_0, δz_0, $\ldots$ offenbar nicht nothwendig **independent** von einander — und mithin kann die Anzahl der Hülfsgleichungen auch der dieser Variationen nicht gleich sein. — Um also zu bestimmen: inwiefern unsere Aufgabe eine **bestimmte** Lösung zuläßt, muß man untersuchen: 1) wie groß die Anzahl der in y, z, λ enthaltenen arbiträren Constanten ist — und 2) wie groß die Anzahl der Hülfsgleichungen ist, welche die Bedingungen der Aufgabe zur Bestimmung dieser Constanten liefern? —

Hinsichtlich der Untersuchung der **Anzahl** der Gleichungen, welche die **außerhalb** des Integralzeichens stehenden Glieder liefern, wird es genügen, wenn wir nur **einen** der verschiedenen Fälle näher betrachten, welche je nach Beschaffenheit der verschiedenen Data der Aufgabe vorkommen können. — Denn aus dem früher (Nr. 27) Gesagten ist einleuchtend, daß diese Verschiedenheit im **Allgemeinen** auf die **Anzahl** der Hülfsgleichungen keinen Einfluß hat. — Wir wollen deshalb z. B. annehmen: daß die Grenzwerthe von x **gegeben** sind, während die von:

$$y,\ \frac{dy}{dx}\ \&c.,\quad z,\ \frac{dz}{dx}\ \&c.$$

unbestimmt bleiben. —

Ferner wollen wir annehmen: daß V höchstens:

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots\ \frac{d^n y}{dx^n}\ \text{und}\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \ldots\ \frac{d^m z}{dz^m}$$

enthält — und endlich: daß die Gleichung $L = 0$ in Beziehung auf die Differentialquotienten von y und z resp. von der n'ten und m'ten Ordnung ist. —

59. Wir haben alsdann ſucceſſive die drei Fälle zu unterſuchen:

1) $m > m'$, $n > n'$. 2) $m > m'$, $n < n'$. 3) $m < m'$, $n < n'$.

1) Es ſei $m > m'$ und $n > n'$. — In dieſem Falle ſind die Ordnungen der zur Beſtimmung von y, z, λ dienenden Gleichungen offenbar:

$$2n \text{ nach } y, \quad m+n \text{ nach } z, \quad n' \text{ nach } \lambda, \tag{1}$$

$$m+n \ldots \quad 2m \ldots\ldots \quad m' \ldots\ldots \tag{2}$$

$$n' \ldots\ldots\ldots \quad m' \ldots\ldots \quad 0 \ldots\ldots \tag{3}$$

Differenzirt man die Gleichungen (1) und (2) auf die gewöhnliche Weiſe reſp. m' mal und n' mal, und eliminirt λ; ſo erhält man zwei Gleichungen von den reſp. Ordnungen:

$$m+n+n' \text{ nach } y, \quad 2m+n' \text{ nach } z, \tag{1'}$$

$$n' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad m' \ldots\ldots\ldots \tag{2'}$$

indem $m - m' > n - n'$ vorausgeſetzt wird. —

Differenzirt man ferner die Gleichungen (1') und (2') reſp. m' mal und $(2m+n')$ mal, und eliminirt z; ſo iſt die Endgleichung in Bezug auf die Differentialquotienten von y von der $2(m+n')$ ten Ordnung — und ihr allgemeines Integral enthält folglich $2(m+n')$ willkürliche Conſtanten. — Da durch die Elimination λ und z ſucceſſive als Functionen der übrigen Veränderlichen beſtimmt werden, ſo werden offenbar keine neuen arbiträren Conſtanten in die Ausdrücke dieſer Größen eingeführt, und mithin iſt die Geſammtanzahl dieſer Conſtanten $= 2(m+n')$.

Suchen wir nun die Anzahl der Gleichungen, welche die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder zur Beſtimmung dieſer Conſtanten liefern. — Die in dieſen Gliedern vorkommenden verſchiedenen Variationen ſind folgende:

$$\delta y_1, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1,$$

$$\delta y_0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)_1,$$

$$dz_1, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1 \ldots\ldots \left(\frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_1,$$

$$dz_0, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0 \ldots\ldots \left(\frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_0;$$

alſo ihre Anzahl $= 2(m+n)$, und wenn dieſelben **independent** von einander wären, ſo erhielte man dadurch, daß man ihre Coefficienten einzeln $= 0$ ſetzte, offenbar $2(m+n)$ Gleichungen. — Da aber die Gleichung $L = 0$ für alle zuläſſigen Werthe von y und z ſtattfinden ſoll, ſo ſind die Variationen $\delta y_1, \ldots$ **nicht** von einander **unabhängig**, ſondern durch die $2(n-n')$ Gleichungen:

$$\delta L_1 = 0,\ \delta L_0 = 0,\ \left(\frac{d\delta L}{dx}\right)_1 = 0,\ \left(\frac{d\delta L}{dx}\right)_0 = 0, \ldots.$$
$$\ldots. \left(\frac{d^{n-n'-1}\delta L}{dx^{n-n'-1}}\right)_1 = 0,\ \left(\frac{d^{n-n'-1}\delta L}{dx^{n-n'-1}}\right)_0 = 0 \qquad (B)$$

verknüpft. — Die Anzahl der in den von dem Zeichen $\int$ freien Gliedern vorkommenden **independenten** Variationen iſt alſo nur $= 2(m+n) - 2(n-n') = 2(m+n')$, d. h. dieſelbe, wie die der **arbiträren** Conſtanten. — Die Differentiation von δL kann nicht über die $(n-n'-1)$te Ordnung hinausgetrieben werden, weil bei der nächſten Differentiation die neuen Variationen:

$$\left(\frac{d^n \delta y}{dx^n}\right)_1,\ \left(\frac{d^n \delta y}{dx^n}\right)_0$$

eingeführt würden. —

2) Es ſei $m > m'$ und $n < n'$, ſo ſind, wenn $m+n > m'+n'$ iſt, die drei Gleichungen von den reſp. Ordnungen:

$2n'$ nach y,	$m+n$ nach z,	n' nach λ,	(1)
$m+n$ ...	$2m$	m' ...	(2)
n'	m'	0	(3)

und wenn wieder λ zwiſchen (1) und (2) eliminirt wird; ſo ſind die beiden reſultirenden Gleichungen von den reſp. Ordnungen:

$m+n+n'$ nach y,	$2m+n'$ nach z,	(1′)
n'	m'	(2′)

Eliminirt man ferner z zwiſchen dieſen beiden Gleichungen, ſo iſt die reſultirende Endgleichung in Bezug auf die Differentialquotienten von y von der $2(m+n')$ten Ordnung, und ihr allgemeines Integral enthält folglich wieder $2(m+n')$ willkürliche Conſtanten. — Auch iſt leicht einzuſehen, daß ähnliche Reſultate für:

$$m+n<m'+n'$$

erhalten würden. — In dieſem Falle liefert die Gleichung:

$$L=0$$

keine Relation zwiſchen den Variationen δy_1, $\delta y_0, \ldots$ weil $\delta L_1, \delta L_0$ offenbar reſp. die Größen:

$$\left(\frac{d^{n'}\delta y}{dx^{n'}}\right)_1, \quad \left(\frac{d^{n'}\delta y}{dx^{n'}}\right)_0$$

enthalten, während

$$\left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_1, \quad \left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_0$$

die höchſten in den von dem Integralzeichen freien Gliedern vorkommenden Differentialquotienten ſind. — Es iſt deshalb nicht möglich, irgend welche der Größen δy_1 $\delta y_0, \ldots$ mittelſt der Gleichungen:

$$\delta L_1=0, \quad \delta L_0=0$$

zu eliminiren — und umſoweniger kann eine ſolche Elimination mit Hülfe der Gleichungen:

$$\left(\frac{d\delta L}{dx}\right)_1=0, \quad \left(\frac{d\delta L}{dx}\right)_0=0, \text{ &c.}$$

geſchehen. — Jede dieſer Gleichungen führt in der That eine neue Variation ein. — Die Anzahl der Gleichungen, welche die von dem Zeichen $\int$ freien Glieder geben, iſt alſo in dieſem Falle der Anzahl der darin enthaltenen Variationen:

$$\delta y_1, \ \delta y_0, \ \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1, \text{ &c., } \delta z_1, \ \delta z_0, \ \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1, \text{ &c.}$$

gleich, nämlich $=2(m+n')$, indem $2n'$ dieſer Größen ſind:

$$\delta y_1, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 \ldots \left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_1, \quad \delta y_0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \ldots \left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_0,$$

und $2m$ derſelben:

$$dz_1, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1 \ldots \left(\frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_1, \quad \delta z_0, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0 \ldots \left(\frac{d^{m-1}\delta z}{dx^{m-1}}\right)_0.$$

Die Anzahl der Hülfsgleichungen iſt alſo wieder der der arbiträren Conſtanten gleich. —

3) Es ſei $m' > m$ und $n' > n$, ſo ſind die drei Gleichungen von den reſp. Ordnungen:

$2n'$ nach y,	$m'+n'$ nach z,	n' nach λ,	(1)
$m'+n' \ldots$	$2m' \ldots\ldots$	$m' \ldots$	(2)
$n' \ldots\ldots$	$m' \ldots\ldots$	$0 \ldots$	(3)

und wenn wieder λ zwiſchen den Gleichungen (1) und (2) eliminirt wird; ſo erhält man zur Beſtimmung von y und z zwei Gleichungen von den Ordnungen:

$2n'+m'$ nach y,	$2m'+n'$ nach z,	(1′)
$n' \ldots\ldots\ldots$	$m' \ldots\ldots\ldots$	(2′)

Wird dann z eliminirt, ſo iſt die Endgleichung mit y von der $2(m'+n')$ten Ordnung. — Die Anzahl der arbiträren Conſtanten iſt alſo in dieſem Falle $=2(m'+n')$.

Was die Anzahl der Hülfsgleichungen betrifft, welche die von dem Integralzeichen freien Glieder geben, ſo iſt zunächſt klar, daß dieſe Glieder $2(m'+n')$ independente Variationen:

$$\delta y_1, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 \ldots \left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_1,$$

$$\delta y_0, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 \ldots \left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_0,$$

$$\delta z_1, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1 \ldots \left(\frac{d^{m'-1}\delta z}{dx^{m'-1}}\right)_1,$$

$$\delta z_0, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_0 \ldots \left(\frac{d^{m'-1}\delta z}{dx^{m'-1}}\right)_0$$

enthalten, und es könnte beim erſten Anblick ſcheinen: daß die
der Gleichungen auch $= 2(m' + n')$, alſo der Anzahl der wi
chen Conſtanten gleich wäre. — Allein dieſer Fall erforde
nähere Unterſuchung. — Setzt man:

$$\beta_{n'} = \frac{dL}{d.\frac{d^{n'}y}{dx^{n'}}}, \quad \beta_{n'-1} = \frac{dL}{d.\frac{d^{n'-1}y}{dx^{n'-1}}}, \text{ &c.,}$$

und:

$$\beta'_{m'} = \frac{dL}{d.\frac{d^{m'}z}{dx^{m'}}}, \quad \beta'_{m'-1} = \frac{dL}{d.\frac{d^{m'-1}z}{dx^{m'-1}}}, \text{ &c.,}$$

ſo iſt leicht einzuſehen, daß der Coefficient von:

$$\left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_1$$

iſt:

$$\lambda_1(\beta_{n'})_1,$$

und daß die Coefficienten von:

$$\left(\frac{d^{n'-2}\delta y}{dx^{n'-2}}\right)_1, \quad \left(\frac{d^{n'-3}\delta y}{dx^{n'-3}}\right)_1, \text{ &c.}$$

reſp. ſind:

$$\lambda_1(\beta_{n'-1})_1 - \left(\frac{d.\lambda\beta_{n'}}{dx}\right)_1, \quad \lambda_1\beta^{n'-2} - \left(\frac{d.\lambda\beta^{n'-1}}{dx}\right)_1 + \left(\frac{d^2.\lambda\beta_{n'}}{dx^2}\right)_1,$$

Setzt man dieſe Coefficienten $= 0$, ſo erhält man die $n' - n$
chungen:

$$\lambda_1(\beta_{n'})_1 = 0,$$

$$\lambda_1(\beta_{n'-1})_1 - \left(\frac{d.\lambda\beta_{n'}}{dx}\right)_1 = 0,$$

$$\lambda_1(\beta_{n'-2})_1 - \left(\frac{d.\lambda\beta_{n'-1}}{dx}\right)_1 + \left(\frac{d^2.\lambda\beta_{n'}}{dx^2}\right)_1 = 0,$$

&c. &c.

$$\lambda_1(\beta_{n'-(n'-n-1)})_1 - \text{&c.} + (-1)^{n'-n-1}\left(\frac{d^{n'-n-1}\lambda\beta_{n'}}{dx^{n'-n-1}}\right)_1 =$$

derſelben aus den Coefficienten von:

$$\left(\frac{d^{n'-1}\delta y}{dx^{n'-1}}\right)_1,\ \left(\frac{d^{n'-2}\delta y}{dx^{n'-2}}\right)_1 \cdots\cdots \left(\frac{d^{n'-(n'-n)}\delta y}{dx^{n'-(n'-n)}}\right)_1$$

geleitet ſind; ſo iſt klar, daß ſie ganz frei ſind von irgend welchen V abgeleiteten Gliedern. —

Der erſten dieſer Gleichungen wird genügt, wenn man $\lambda_1 = 0$, $(\beta_{n'})_1 = 0$ ſetzt. — Wir wollen dieſe beiden Annahmen einzeln verſuchen: 1) Es ſei $\lambda_1 = 0$ und $(\beta_{n'})_1 \gtrless 0$, ſo reducirt ſich die zweite der vorhergehenden Gleichungen auf:

$$(\beta_{n'})_1 . \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0,$$

oder weil $(\beta_{n'})_1 \gtrless 0$ iſt, auf:

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0,$$

ob man ſieht leicht ein, daß die Annahmen:

$$\lambda_1 = 0,\ \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0,\ \beta_{n'} > \text{ oder } < 0$$

die dritte dieſer Gleichungen auf:

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)_1 = 0$$

reducirt; u. ſ. f. —

Hieraus erhellet: daß, wenn $(\beta_{n'})_1$ nicht $= 0$ geſetzt wird, die vorhergehenden Gleichungen gleichbedeutend ſind mit:

$$\lambda_1 = 0,\ \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0,\ \left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)_1 = 0, \text{ &c.},\ \left(\frac{d^{n'-n-1}\lambda}{dx^{n'-n-1}}\right)_1 = 0. \quad \text{(D)}$$

Ebenſo ergibt ſich, daß die aus den Coefficienten:

$$\left(\frac{d^{m'-1}\delta z}{dx^{m'-2}}\right)_1,\ \left(\frac{d^{m'-2}\delta z}{dx^{m'-2}}\right)_1 \cdots\cdots \left(\frac{d^{m'-(m'-m-1)}\delta z}{dx^{m'-(m'-m-1)}}\right)_1$$

unter der Vorausſetzung, daß:

$$\beta'_{m'} \text{ oder } \frac{dL}{d.\frac{d^{m'}z}{dx^{m'}}}$$

an der oberen Grenze nicht verſchwindet, abgeleiteten Gleichungen gleichgeltend ſind mit:

$$\lambda_1 = 0,\ \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0 \ldots\ldots \left(\frac{d^{m'-m-1}\lambda}{dx^{m'-m-1}}\right)_1 = 0. \qquad (E)$$

Setzt man nun $n' - n > m' - m$, ſo iſt klar: daß dieſe Gleichungen mit den erſten $m' - m$ Gleichungen der Gruppe (D) identiſch ſind. Die Anzahl der Hülfsgleichungen wird alſo um $m' - m$ vermindert — und wenn dieſelbe Vorausſetzung auf die untere Grenze angewandt wird; ſo findet eine ähnliche Verminderung ſtatt. — In dieſem Falle hat man alſo zur Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten nur $2(m' + n') - 2(m' - m) = 2(m + n')$ Gleichungen, und es bleiben mithin $2(m' - m)$ Conſtanten unbeſtimmt. —

2) Es ſei $\lambda_1 \gtrless 0$, ſo wird die erſte der Gleichungen (C):

$$(\beta_{n'})_1 = 0.$$

In Folge dieſer letzten Gleichung und wegen $\lambda_1 \gtrless 0$ reducirt ſich die zweite der vorhergehenden Gleichungen (C) auf:

$$(\beta_{n'-1})_1 - \left(\frac{d\beta_{n'}}{dx}\right)_1 = 0,$$

und die dritte wird:

$$\lambda_1\left(\beta_{n'-2} - \frac{d\beta_{n-1}}{dx} + \frac{d^2\beta_{n'}}{dx^2}\right)_1 + (\beta_{n'-1})_1\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0.$$

Ohne dieſe Unterſuchung weiter fortzuſetzen, ſieht man ſchon: daß die Verminderung der Anzahl der Hülfsgleichungen hier nicht ſtattfindet, wie im vorhergehenden Falle, weil die aus den Coefficienten von:

$$\delta y_1,\ \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1,\ \text{&c.}$$

gebildeten Gleichungen von den aus den Coefficienten von:

$$\delta z_1, \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1, \text{ \&c.}$$

abgeleiteten offenbar verſchieden ſind. —

3) Ferner wird den beiden erſten der Gleichungen (C) genügt, wenn man ſetzt:

$$\lambda_1 = 0, \quad (\beta_{n'})_1 = 0,$$

wodurch die dritte der Gleichungen (C) auf:

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 \left(\beta_{n'-1} - \frac{2d\beta_{n'}}{dx}\right)_1 = 0$$

reducirt wird, und dieſer letzten Gleichung geſchieht Genüge, wenn man entweder ſetzt:

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0,$$

oder:

$$\left(\beta_{n'-1} - \frac{2d\beta_{n'}}{dx}\right)_1 = 0.$$

In der erſten Vorausſetzung ſind die drei erſten der Gleichungen (C) gleichbedeutend mit:

$$\lambda_1 = 0, \quad \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_1 = 0, \quad (\beta_{n'})_1 = 0,$$

und in der zweiten Vorausſetzung hat man:

$$\lambda_1 = 0, \quad (\beta_{n'})_1 = 0, \quad \left(\beta_{n'-1} - \frac{2d\beta_{n'}}{dx}\right)_1 = 0.$$

Was die aus den Coefficienten von:

$$\delta z_1, \quad \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_1, \quad \text{\&c.}$$

abgeleiteten Gleichungen betrifft, ſo iſt klar, daß die erſte Vorausſetzung die beiden erſten dieſer Gleichungen, nämlich die, welche aus den Coefficienten der Variationen:

$$\left(\frac{d^{m'-1}\delta z}{dx^{m'-1}}\right)_1, \quad \left(\frac{d^{m'-2}\delta z}{dx^{m'-2}}\right)_1$$

abgeleitet ſind, auf $0=0$ reducirt, ſo daß die Anzahl der Hülfsgleichungen um zwei vermindert wird, während in der letzten Vorausſetzung ſich dieſe Anzahl nur um eine Einheit verkleinert. —

Ohne dieſe Betrachtungen weiter fortzuſetzen, erhellet aus dem Geſagten ſchon hinreichend: 1) daß, wenn jede der beiden Größen $(\beta_{m'})_1$, $(\beta'_{m'})_1$ als endlich angenommen wird, die Anzahl der Hülfsgleichungen ſich um $m'-m$ vermindert — und daß durch dieſelbe Annahme hinſichtlich der Größen $(\beta_{m'})_0$, $(\beta'_{m'})_0$ eine gleiche Verminderung dieſer Anzahl bewirkt wird; — 2) daß, wenn die erſte Gleichung jeder Gruppe, d. h. die, welche aus den Coefficienten von:

$$\left(\frac{d^{m'-1}\delta y}{dx^{m'-1}}\right)_1, \quad \left(\frac{d^{m'-1}\delta z}{dx^{m'-1}}\right)_1$$

gebildet ſind, durch:

$$(\beta_{m'})_1=0, \quad (\beta'_{m'})_1=0$$

verificirt werden, die Anzahl der Hülfsgleichungen um eine zwiſchen 0 und $2(m'-m)$ incl. liegende Zahl verkleinert wird, je nach der Art, wie man den übrigen Gleichungen Genüge leiſtet. —

Das Endreſultat der ganzen vorhergehenden Unterſuchung läßt ſich nun folgendermaßen ausdrücken:

1) Wenn $m>m'$ und $n>n'$ iſt, ſo iſt die Ordnungszahl der Enddifferentialgleichung die größte der beiden Zahlen:

$$2(m+n'), \quad 2(m'+n),$$

und man hat zur Beſtimmung der in ihrem vollſtändigen Integrale vorkommenden willkürlichen Conſtanten eine hinreichende Anzahl von Hülfsgleichungen. —

2) Daſſelbe findet ſtatt, wenn $m>m'$ und $n<n'$ iſt. —

3) Wenn $m'>m$ und $n'>n$ iſt, ſo wird die Ordnungszahl der Enddifferentialgleichung im Allgemeinen durch:

$$2(m'+n')$$

ausgedrückt — und ihr allgemeines Integral kann eine Anzahl unbeſtimmtbleibender Conſtanten enthalten, welche die kleinſte der beiden Zahlen:

$$2(m'-m), \quad 2(n'-n)$$

nicht überſteigt. —

60. Poiſſon ſagt in ſeiner ſchätzbaren Abhandlung über die Variationsrechnung *), daß die Auflöſung einer Aufgabe, wie die vorhin unterſuchte, im Allgemeinen unbeſtimmt bleibende Conſtanten enthalten müſſe, wenn die Relation zwiſchen y und z durch eine Differentialgleichung ausgedrückt wird, ohne dieſe Behauptung jedoch zu motiviren, welche mit unſerm vorhergehenden Ergebniſſe im völligen Widerſpruche ſteht. — Das Räſonnement, welches Poiſſon zu dieſem Schluſſe geführt hat, mag etwa folgendes geweſen ſein: Geſetzt die Differentialgleichung:

$$L = 0$$

ſei integrabel, ſo daß ſie den Werth von z als Function von $x, y, \ldots$ und einer Anzahl arbiträrer Conſtanten gibt, man alſo hat:

$$z = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx} \ldots .\ c,\ c',\ \ldots .\right),$$

woraus die Werthe von:

$$\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2z}{dx^2},\quad \&c.$$

abgeleitet und in die gegebene Größe V ſubſtituirt werden mögen; ſo wird V auf die Form:

$$V = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx} \ldots .\ c,\ c',\ \ldots .\right)$$

gebracht. — Wenn nun die Variationsrechnung angewandt wird, um das eventuelle Maximum, oder Minimum von $\int V dx$ zu finden; ſo iſt klar, daß die Auflöſung im Allgemeinen alle die arbiträren Conſtanten enthalten wird, welche in V vorkommen, d. h. alle die Conſtanten $c,\ c' \ldots$, welche durch Integration der Gleichung:

$$L = 0$$

eingeführt ſind. — Und da die Lagrange'ſche Methode nur eine andere Weiſe iſt, daſſelbe zu bewirken, ſo iſt zu erwarten, daß das Endreſultat eine gewiſſe Anzahl unbeſtimmt bleibender Conſtan-

*) Mém. de l'instit. tom. XII. p. 258.

ten enthalten wird. — Hierauf aber antworten wir: daß die nach dieſen beiden Methoden gelöſ'ten Aufgaben **weſentlich verſchieden** ſind. — Bei der *erſten*, wo die Größen c, c', ... als **unveränderlich** vorausgeſetzt werden, ſucht man unter allen Werthesſyſtemen von y und z, welche der particulären Gleichung:

$$z = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots c, c' \ldots\right)$$

genügen, dasjenige Syſtem, welche das gegebene Integral zu einem *Maximum*, oder *Minimum* macht. — Aber bei Anwendung der *Lagrange*'ſchen Methode wird das verlangte Wertheſyſtem nicht blos unter denen geſucht, welche der particulären Gleichung (α) genügen, ſondern unter allen denen, welche der *allgemeinen* Gleichung:

$$L = 0$$

genügen. — Wenn alſo dieſe Methode vollkommen iſt, ſo muß ſie die Mittel an die Hand geben: das verlangte Wertheſyſtem aus allen denen herauszufinden, welche den *unendlich vielen* Gleichungen genügen, die aus:

$$z = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots c, c' \ldots\right)$$

abgeleitet werden können, indem man den Conſtanten *verſchiedene* Werthe beilegt. — Sie muß alſo die zur Beſtimmung dieſer Conſtanten hinreichende Anzahl von Gleichungen liefern. — Ein einfaches Beiſpiel wird dies Alles gehörig erläutern.

Beiſpiel.

Man ſoll für die durch die *Differentialgleichung*:

$$x + y\,\frac{dy}{dx} + z\,\frac{dz}{dx} = 0 \qquad \text{(A)}$$

mit einander verbundenen Functionen y und z ſolche Formen finden, daß das Integral:

$$\int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}\,dx$$

ein *Minimum* wird. —

Aufl. Da die Gleichung (A) integrabel ist, so kann die Aufgabe nach jeder der beiden Methoden behandelt werden; d. h. man kann entweder die Gleichung (A) integriren, und mittelst ihres Integrales:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

die Größe $\frac{dz}{dx}$ aus V eliminiren, ehe man die Variationsrechnung anwendet, oder man kann letztere unmittelbar auf den Ausdruck:

$$\int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}\, dx$$

anwenden, und nach der Methode von Lagrange (A) als eine Bedingungsgleichung betrachten. — Die Aufgabe ist aber in beiden Fällen wesentlich verschieden, was wohl am deutlichsten einleuchten wird, wenn wir ihre geometrische Bedeutung in beiden Fällen ins Auge fassen. —

Bei der ersten Methode, wo die Gleichung (A) integrirt wird, ehe man Variationsrechnung anwendet, besteht die Aufgabe darin: auf einer gegebenen Kugelfläche von dem Halbmesser a die kürzeste Linie zu ziehen. — Die Fläche, auf welcher die gesuchte Linie liegt, ist also vollständig fixirt, indem sowohl der Mittelpunkt, wie der Halbmesser der Kugelfläche gegeben ist. — Bei der Behandlung der Aufgabe nach der Lagrange'schen Methode dagegen kann man eine beliebige Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist, als die Fläche wählen, worauf die kürzeste Linie zu ziehen ist — und wenn die Auflösung der Aufgabe vollständig sein soll; so muß diese Methode nicht blos eine Regel für das Ziehen dieser Linie auf einer speciellen, so ausgewählten Kugelfläche an die Hand geben, sondern auch eine Gleichung zur Bestimmung des Halbmessers der Kugelfläche, auf welcher die so gezogene Linie kürzer ist, als die ähnlich gezogene Linie auf jeder andern Kugelfläche. — Wendet man diese Methode wirklich an, so findet man:

$$a = \infty.$$

Um dieses darzuthun, wollen wir annehmen, daß die Grenzwerthe von x gegeben sind; d. h. es sollen die Formen der Functionen y, z so bestimmt werden, daß das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)} \cdot dx$$

ein Minimum wird, wenn die Grenzwerthe x_0, x_1 gegeben, und die Functionen y, z durch die Differenzialgleichung:

$$x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0$$

mit einander verknüpft ſind. —

Hier iſt:

$$V = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)},$$

und folglich:

$$P_1 = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}}, \quad P'_1 = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}},$$

$$N = 0, \qquad N' = 0.$$

Ferner iſt nach Gleichung (A):

$$\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \beta = y, \quad \alpha' = \frac{dz}{dx}, \quad \beta' = z,$$

und die Gleichungen:

$$N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{dx} + \&c. = 0,$$

$$N' + \lambda\alpha' - \frac{d(P'_1 + \lambda\beta')}{dx} + \&c. = 0$$

werden daher:

$$y\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right) = 0,$$

$$z\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right) = 0, \qquad \text{(B)}$$

dem der Coefficient von λ in jeder Gleichung von selbst verschwin-
t. —

Eliminirt man $\frac{d\lambda}{dx}$ zwischen diesen Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dz^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right)-y\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right)=0,$$

ıd wenn man diese Gleichung integrirt, was offenbar thunlich ist;
findet man:

$$\frac{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}=c, \qquad (B')$$

› c eine arbiträre Constante ist. —

Um diese Constante zu bestimmen, muß man die von dem Inte-
algzeichen freien Glieder betrachten. — Da nun x_0, x_1 gegeben
ıd y_1, y_0, z_1, z_0 unbestimmt sind; so müssen offenbar die Coef-
ienten von δy_1, δy_0; δz_1, δz_0 einzeln verschwinden. — Man
it daher die Gleichungen:

$$(P_1+\lambda\beta)_1=0, \quad (P'_1+\lambda\beta')_1=0,$$
$$(P_0+\lambda\beta)_1=0, \quad (P'_1+\lambda\beta')_0=0,$$

ıer:

$$\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right)_1+\lambda_1 y_1=0,$$
$$\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right)_1+\lambda_1 z_1=0 \qquad (C)$$

ir die obere Grenze, und zwei ähnliche Gleichungen für die un-
ere Grenze. —

Durch Elimination von λ_1 ergibt ſich:

$$\left(\frac{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}}\right)_1 = 0;$$

folglich iſt $c = 0$, und Gleichung (B') reducirt ſich auf:

$$z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} = 0,$$

woraus durch Integration folgt:

$$y = mz.$$

Die geſuchten Functionen werden mithin durch die beiden Gleichungen:

$$y = mz,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

beſtimmt. — Geht man nun zu der erſten der Gleichungen (B) zurück, und eliminirt y, z mittelſt der eben gefundenen Gleichungen; ſo erhält man:

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \frac{d\lambda}{dx} - \frac{1}{a} = 0,$$

woraus ſich durch Integration ergibt:

$$\lambda - \frac{1}{a}\,\text{arc.sin}\,\frac{x}{a} = b.$$

An der oberen Grenze iſt alſo:

$$\lambda_1 - \frac{1}{a}\,\text{arc.sin}\,\frac{x_1}{a} = b, \qquad \text{(D)}$$

und wenn in die erſte der Gleichungen (C) für:

$$y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \left(\frac{dz}{dx}\right)_1$$

ihre Werthe als Functionen von x geſetzt werden; ſo findet man:

$$\lambda_1 - \frac{x_1}{a\sqrt{(a^2 - x_1^2)}} = 0, \qquad \text{(E)}$$

Wenn ferner λ_1 zwiſchen (D) und (E) eliminirt wird, ſo erhält man:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x_1}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)}} - \text{arc.sin}\frac{x_1}{a}\right) = b; \qquad \text{(F)}$$

und ebenſo für die untere Grenze:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x_0}{\sqrt{(a^2 - x_0^2)}} - \text{arc.sin}\frac{x_0}{a}\right) = b. \qquad \text{(G)}$$

Dieſen Gleichungen wird durch:

$$a = \infty, \quad b = 0$$

Genüge geleiſtet. — Wenn a nicht $= \infty$ iſt, ſo ergibt ſich durch Subtraction dieſer beiden Gleichungen die Gleichung:

$$\frac{x_1}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)}} - \text{arc.sin}\frac{x_1}{a} = \frac{x_0}{\sqrt{(a^2 - x_0^2)}} - \text{arc.sin}\frac{x_0}{a},$$

welche wegen $x_1 > x_0$ offenbar unmöglich iſt. — Mithin iſt $a = \infty$ der einzige Werth von a, welcher den Gleichungen (F) und (G) genügt. —

Dieſes Beiſpiel zeigt bündig: daß die Lagrange'ſche Methode immer eine Gleichung zur Beſtimmung der durch die Integration der Bedingungsgleichung eingeführten arbiträren Conſtante an die Hand gibt, und daß mithin die durch dieſe Methode erhaltene Auflöſung im Allgemeinen keine unbeſtimmt bleibende Conſtante enthält. — Was die in der jetzigen Auflöſung vorkommende Conſtante m anlangt, ſo iſt leicht erſichtlich: daß deren Erſcheinen rein zufällig und der jetzigen Aufgabe eigenthümlich iſt; aber in keinem Falle davon herrührt, daß die Bedingungsgleichung eine Differentialgleichung iſt, wie Poiſſon meint. — Denn wenn man das Integral:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

als Bedingungsgleichung nimmt, und z aus:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}\, dx$$

eliminirt, ehe man Variationsrechnung anwendet; so enthält die Auflösung die Constante m auch noch. — Geometrisch gesprochen, bedeutet das Vorhandensein dieser Constante: daß man zwischen zwei Parallelkreisen auf der Kugel eine kürzeste Linie ziehen soll. —

Die vorhergehende allgemeine Theorie läßt sich leicht auf den Fall von drei und mehreren primitiven oder unabhängigen Functionen y, z, u ... ausdehnen, und das Verfahren bleibt sich sowohl hinsichtlich der Herleitung der allgemeinen Differentialgleichungen, als hinsichtlich der Bestimmung der in der Auflösung vorkommenden willkürlichen Constanten ähnlich. — Anwendungsbeispiele werden in Kap. 4 bei den geometrischen Anwendungen der Variationsrechnung vorkommen. —

Aufgabe VIII.

61. Man soll diejenige Form der Function y bestimmen, welche das Integral:

$$\int V dx$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht, und zugleich der Bedingung:

$$\int V' dx = c$$

genügt, indem V und V' Functionen von:

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \text{&c.}$$

sind. —

Aufl. Die Bedingung für das Max., oder Min. von $\int V dx$ ist wieder wie früher:

$$D\int V dx = 0,$$

und die Bedingung:

$$\int V' dx = c$$

gibt:

$$D.\int V' dx = 0.$$

Die Auflösung dieser Aufgabe wird also nach der Lagrange'schen Methode gefunden, wenn man die zweite dieser Gleichungen mit einer unbestimmten Größe λ multiplicirt und das Produkt zu der ersten addirt, wodurch man erhält:

$$V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \delta.\int V dx + \lambda(V'_1 dx_1 - V'_0 dx_0 + \delta.\int V' dx) = 0.$$

Aus der Form dieſer Gleichung erhellet aber: daß derſelben nur genügt werden kann, wenn man ſetzt:

$$\lambda = \text{const.}$$

Denn wenn man für $\delta.\int V dx$ und $\delta.\int V' dx$ ihre Werthe ſetzt, und wieder wie früher verfährt; ſo geben die von dem Integralzeichen freien Glieder eine Gleichung, worin nur λ und conſtante Größen vorkommen, und welche mithin für λ nur einen conſtanten Werth geben kann. — Die Aufgabe wird alſo durch die Form von y gelöſ't, welche das Integral:

$$\int (V + mV')\, dx$$

zu einem abſoluten Max., oder Min. macht. — Dieſes Integral muß daher ganz ebenſo behandelt werden, wie das Integral $\int V dx$ in Aufg. II behandelt iſt. — Der ſo gefundene Ausdruck von y muß alſo die Conſtante m enthalten, weil die nach dem Verfahren in Aufg. II gebildeten Gleichungen blos zur Beſtimmung der durch die Integration der Differenzialgleichung eingeführten Conſtanten hinreichend ſind. — Dieſe Conſtante m wird aber dadurch beſtimmt: daß man den Werth von $\int V' dx$ nach dem gefundenen von y berechnet und $= c$ ſetzt. Wenn z. B. unter allen Formen von y, welche das Integral:

$$\int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}\, dx = c$$

machen, die eine geſucht würde, welche $\int y dx$ zu einem Maximum macht; ſo müßte man zunächſt die Form von y ſo beſtimmen, daß:

$$\int \left\{ y + m\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \right\} dx$$

ein abſolutes Maximum wird, und nach dem ſo für y gefundenen Werthe, welcher die Conſtante m enthalten muß, den Werth des Integrales:

$$\int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}\, dx.$$

Setzt man nun endlich diesen letzten Werth der gegebenen Constante c gleich; so ergibt sich aus dieser Gleichung der Werth von m — und die Auflösung ist mithin vollständig. —

Diese Theorie kann auch leicht auf den Fall von zwei, oder mehrern gegebenen Integralen erweitert werden. Denn wenn:

$$\int V'dx,\ \int V''dx,\ \&c.$$

die Integrale sind, deren Werthe gegeben sind; so sieht man leicht ein, daß der Ausdruck, welcher zu einem absoluten Maximum gemacht werden muß, folgender ist:

$$\int (V + mV' + m'V'' + \&c.)\,dx.$$

Aufgaben dieser Art werden isoperimetrische genannt, wegen der hieher gehörigen Aufgaben, wo es sich darum handelt: unter allen Linien von gegebener Länge die eine zu finden, welche ein gegebenes Integral zu einem Maximum, oder Minimum macht. — Da aber die Benennung: isoperimetrische Probleme nicht die ganze Klasse hieher gehöriger Aufgaben umfaßt, also eine zu beschränkte Bedeutung hat; so ist es offenbar richtiger, die Benennung: relative Maxima und Minima anzuwenden. —

Anwendungsbeispiele hiervon werden bei den geometrischen Anwendungen der Variationsrechnung in Kap. 4 vorkommen. —

Die Behandlung der Gleichung:

$$D.\int V dx = 0$$

oder vielmehr:

$$D.\int (V + mV')\,dx = 0$$

bleibt in Bezug auf relative Maxima und Minima offenbar ganz dieselbe, wie für absolute; aber die Anwendung der Jacobischen Theorie in Bezug auf die zweite Variation ist in diesen beiden Fällen wesentlich verschieden. — Delaunay ist in seiner weiter oben (S. 87) angeführten Abhandlung auf diesen Gegenstand näher eingegangen; allein in diesem Theile seiner schätzbaren Arbeit scheinen uns seine Schlüsse und Resultate weniger genügend, als in Bezug auf absolute Maxima und Minima, weshalb wir hier in einem für das erste Studium der Variationsrechnung bestimmten Lehrbuche

jen Theil der allgemeinen Theorie übergehen — und den Leſer auf Abhandlung von Delaunay ſelbſt verweiſen.*) —

*) Wenn durch die Lagrange'ſche Methode eine Aufgabe über relative Maxima und Minima auf eine über abſolute zurückgeführt iſt, ſo verſteht ich von ſelbſt: daß auch das Jacobi'ſche Kriterium anwendbar bleibt. —

In dem letzten Beiſpiele hat man:

$$U=\int(y+m\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)})\,dx,$$

alſo:

$$V=y+m\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)},\quad P_1=\frac{dV}{d\frac{dy}{dx}}=\frac{m\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}},$$

und da x in V nicht explicite vorkommt, nach (δ) auf S. 60:

$$V=c'+P_1\frac{dy}{dx}$$

oder:

$$y+m\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=c'+\frac{m\frac{dy^2}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}};$$

folglich:

$$(y-c')^2+(x-c'')^2=m^2, \qquad (\alpha)$$

wo m leicht durch c ausgedrückt wird. —

Weiter iſt nun:

$$Q_1=\frac{d^2V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{m}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}, \qquad (\beta)$$

und die Gleichung:

$$N-\frac{dP_1}{dx}=0 \text{ wird: } 1-\frac{m\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}=0,$$

woraus folgt:

$$m=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Setzt man dieſen Werth von m in (β), ſo erhält man:

$$Q_1 = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Jenachdem alſo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, oder poſitiv iſt, gibt (α) ein Maximum, oder Minimum von U. —

Dagegen iſt offenbar das Jacobi'ſche Kriterium nicht mehr anwendbar, wenn in U zwei, oder mehrere primitive Functionen $y, z, \ldots$, oder wenn doppelte und mehrfache Integrale darin vorkommen.

Endlich mag noch bemerkt werden, daß ſich in den letzten Jahren auch Bertrand, Heine, Heſſe, Minding, Spitzer ꝛc. und Clebſch mit der Herleitung und weitern Entwickelung der Jacobi'ſchen Theorie beſchäftigt haben — und daß namentlich Clebſch ſich bemüht hat: die Unterſuchung auf den Fall mehrerer primitiver Functionen und mehrfacher Integrale auszudehnen (Crelles Journal Band 54 und 55), jedoch können dieſe Unterſuchungen noch nicht in ein Elementarlehrbuch, wie das vorliegende, aufgenommen werden. — S.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Variationsrechnung auf Geometrie.

A. Auf krumme Linien.

62. Die geometrischen Anwendungen der Variationsrechnung beschränken sich ausschließlich auf die Theorie der Maxima und Minima solcher Größen, welche durch einfache und doppelte bestimmte Integrale ausgedrückt werden, weil bei geometrischen Untersuchungen überhaupt höchstens zwei independente Veränderliche vorkommen können. — Denn so wie in der Differentialrechnung jeder Aufgabe über Maxima und Minima, wobei nicht mehr als zwei independente Veränderliche in Betracht kommen, eine geometrische Einkleidung gegeben werden kann, ebenso kann man in der Variationsrechnung jeder Aufgabe über Maxima und Minima eine geometrische Fassung geben, wenn dabei nur einfache, oder doppelte bestimmte Integrale vorkämen. — In der Differentialrechnung lautet eine solche Aufgabe bekanntlich: „Wenn eine krumme Linie, oder Fläche gegeben ist, die Punkte derselben zu finden, für welche die Ordinate ein Maximum, oder Minimum ist." — Aber in der Variationsrechnung besteht diese Aufgabe darin: „Die Natur, d. h. die Gleichung einer krummen Linie, oder Fläche zu finden, welche die Eigenschaft hat, den Werth eines gegebenen Integrales zu einem Maximum, oder Minimum zu machen." — Wenn in den Aufgaben der frühern Kapitel für die Worte: „Form der Function" die Worte: „Natur der krummen Linie, oder Fläche" gesetzt werden, so hat man offenbar schon ihre geometrische Fassung, in welcher diese Aufgaben auch zuerst von Joh. und Jac. Bernoulli behandelt sind (Acta Erudit. 1696—97.). — Indem wir die geometrischen Anwendungen der Variationsrechnung in besondern Kapiteln abhandeln, beschränken wir uns dabei lediglich auf solche Aufgaben, in welchen die bestimmten Integrale

rein geometrische Größen: Längen, Flächen, Volumen ausdrücken — und werden die Aufgaben, worin die bestimmten Integrale mechanische Größen: Zeiten, Kräfte, oder Geschwindigkeiten ausdrücken, wenngleich die gesuchte Größe eine krumme Linie, oder Fläche, also eine geometrische Größe ist, später in einem speciellen Kapitel unter der Aufschrift: „mechanische Anwendungen der Variationsrechnung" abhandeln. — Wir beginnen mit der folgenden sehr allgemeinen Aufgabe, welche uns sowohl bei den geometrischen, wie bei den mechanischen Anwendungen unserer Wissenschaft von Nutzen sein wird. —

Aufgabe I.

63. Wenn ds das Element einer ebenen Curve und μ eine gegebene Function ihrer Coordinaten x, y ist, die Natur dieser Curve so zu bestimmen, daß $\int \mu ds$ ein Maximum, oder Minimum wird.

Aufl. Indem wir die Lagrange'sche Methode, als die mehr symmetrische, anwenden, betrachten wir s als independente Veränderliche und die Coordinaten x, y als Functionen von s, welche durch die Gleichung:

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$$

verknüpft sind. — Die Gleichungen (A) auf S. 130 werden in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx} - \frac{d \cdot \lambda \frac{dx}{ds}}{ds} &= 0, \\ \frac{d\mu}{dy} - \frac{d \cdot \lambda \frac{dy}{ds}}{ds} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Wenn man diese Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ multiplicirt und die Produkte addirt, so ergibt sich offenbar:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\mu}{ds},$$

woraus folgt:

$$\lambda = \mu + a.$$

Die willkürliche Conſtante a iſt offenbar dadurch eingeführt, daß s als independente Veränderliche gewählt iſt; denn man gelangt offenbar durch das angewandte Verfahren zu derſelben Gleichung, man mag $\int \mu ds$, oder $\int (\mu + c) ds$ zu dem urſprünglichen Integrale nehmen — d. h. in geometriſcher Sprache: man erhält durch dieſe Methode daſſelbe Reſultat, die Länge der Curve mag gegeben ſein, oder nicht. — Man ſieht jedoch leicht ein, daß ſich die gegenwärtige Aufgabe von dem iſoperimetriſchen Probleme dadurch unterſcheidet, daß $a = 0$ geſetzt iſt. — Denn wenn die independente Veränderliche von s in θ umgeſetzt wird, ſo wird die Gleichung:

$$\int \left\{ d\mu + \lambda \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\delta y}{ds} \right) \right\} ds = 0,$$

indem man $\mu + a$ für λ ſetzt, auf die Form:

$$\int \left(\delta\mu \frac{ds}{d\theta} + (\mu + a) \frac{\left(\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\delta x}{d\theta} + \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\delta y}{d\theta} \right)}{\frac{ds}{d\theta}} \right) d\theta = 0,$$

oder wegen:

$$\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\delta x}{d\theta} + \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\delta y}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\delta s}{d\theta}$$

auf:

$$\int \left(\delta\mu \frac{ds}{d\theta} + \mu \frac{d\delta s}{d\theta} + a \frac{d\delta s}{d\theta} \right) d\theta = 0$$

reducirt, welche offenbar mit der Gleichung:

$$\delta . \int \mu \frac{ds}{d\theta} d\theta + a\delta . \int \frac{ds}{d\theta} d\theta = 0$$

identiſch iſt. — Wenn alſo nicht $a = 0$ iſt, ſo gehört das durch dieſe Methode gelöſ'te Problem zu der Klaſſe der iſoperimetriſchen Probleme, nämlich unter allen Curven von gegebener Länge die zu finden, welche $\int \mu \frac{ds}{d\theta} d\theta$ oder $\int \mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Setzt man $a = 0$, so ist $\lambda = \mu$, und wenn man diesen Werth in jede der Gleichungen (A) substituirt; so findet man:

$$\frac{d\mu}{dx} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\mu}{ds} = \mu \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\frac{d\mu}{dy} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\mu}{ds} = \mu \frac{d^2y}{ds^2},$$

oder für $\frac{d\mu}{ds}$ seinen Werth:

$$\frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d\mu}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

gesetzt:

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{d\mu}{dy} \cdot \frac{dx}{ds}\right) = \mu \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\mu}{dy} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{dy}{ds}\right) = \mu \frac{d^2y}{ds^2}. \qquad \text{(B)}$$

Multiplicirt man diese letzten Gleichungen resp. mit $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ und zieht die Produkte von einander ab, so ergibt sich:

$$\mu\left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}\right) = \frac{\mu}{\varrho} = \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{d\mu}{dy} \cdot \frac{dx}{ds},$$

wo ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, oder wenn α, β die spitzen Winkel bezeichnen, welche die Normale mit den Coordinatenaxen macht:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\mu}{dx} \cos\alpha + \frac{d\mu}{dy} \cos\beta\right). \qquad \text{(C)}$$

Diese Gleichung enthält die geometrische Definition der gesuchten Curve, und es ist offenbar nicht möglich, sie weiter zu integriren, ohne vorher die Form von μ näher zu fixiren; jedoch kann die folgende Eigenschaft noch aus der allgemeinen Gleichung (C) hergeleitet werden. —

Wenn $\int \frac{ds}{\mu}$ das gegebene Integral ist, so unterscheidet sich das Resultat, zu welchem man gelangt, von (C) nur durch das Zeichen der rechten Seite; es ist also:

$$\frac{1}{\varrho} = +\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\mu}{dx}\cos\alpha + \frac{d\mu}{dy}\cos\beta\right).$$

Beide Auflösungen sind aber enthalten in:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\cos\alpha + \frac{d\mu}{dy}\cos\beta\right)^2,$$

und mithin stehen die in der Gleichung:

$$\varrho^2 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

enthaltenen zwei Curven in der Beziehung zu einander: daß, wenn die eine das Integral $\int \mu ds$ zu einem Max., oder Min. macht, die andere in Bezug auf das Integral $\int \frac{ds}{\mu}$ dieselbe Eigenschaft hat. —

64. Wenn die Grenzwerthe von x und y gegeben sind, so werden die in dem Integrale von (C) vorkommenden arbiträren Constanten durch Substitution dieser Werthe bestimmt. — Aber wenn die Grenzpunkte der gesuchten Curve mittelst ihres Durchschnittes mit zwei gegebenen Curven bestimmt werden, so läßt sich allgemein zeigen, daß die eine Klasse der der Aufgabe genügenden Curven die Grenzcurven rechtwinklig durchschneidet. — Denn die außerhalb des Integralzeichens stehenden Glieder geben die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1\right\} &= 0, \\ \mu_0\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0\right\} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

welchen genügt wird, wenn man setzt:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_0 = 0$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 &= 0, \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

oder durch eine Verbindung der ersten und vierten, oder der zweiten und dritten dieser Gleichungen. —

Läßt man die ſelten zuläſſigen Annahmen:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_0 = 0$$

unbeachtet, und ſind die Gleichungen der Grenzcurven:

$$dy_1 = m_1 dx_1, \quad dy_0 = m_0 dx_0;$$

ſo hat man:

$$\delta y_1 = m_1 \delta x_1, \quad \delta y_0 = m_0 \delta x_0,$$

und die Gleichungen (E) werden folglich:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + m_1\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + m_0\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = 0, \qquad \text{(F)}$$

wodurch offenbar das zu Beweiſende ausgedrückt wird. —

65. Um zu beſtimmen, ob die erhaltene Auflöſung ein Maximum, oder ein Minimum gibt, muß das gegebene Integral auf die Form:

$$\int \mu \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}\, dx$$

gebracht werden, welches gibt:

$$\frac{d^2 V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2.\mu\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\mu}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{(G)}$$

und man hat folglich nach Nr. 40 ein Maximum, oder ein Minimum, jenachdem dieſe letzte Größe negativ, oder poſitiv iſt, d. h. jenachdem μ und:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

entgegengeſetzte, oder gleiche Zeichen haben. — Da aber in der erſten Vorausſetzung der Werth des Integrales negativ iſt, ſo iſt klar, daß in dieſem Falle unter einem Maximum der am weiteſten von — ∞ entfernte oder am nächſten bei Null liegende

Werth zu verſtehen iſt. — Der gefundene Werth iſt alſo, abſolut genommen, in allen Fällen ein Minimum. —

Es iſt früher (S. 100) gezeigt worden, daß der Ausdruck:

$$\frac{d^2V}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

das Zeichen nicht ändern darf zwiſchen den Integrationsgrenzen, wenn ein Maximum, oder Minimum ſtattfinden ſoll. — Wenn aber die Länge des Curvenbogens durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\,dx$$

ausgedrückt wird, ſo iſt die Wurzelgröße ſtets als poſitiv vorausgeſetzt. — Hieraus, und aus Gleichung (G) erhellet, daß μ für alle zwiſchen x_1 und x_0 liegende Werthe von x daſſelbe Zeichen behalten muß, wenn die fragliche Bedingung erfüllt werden ſoll. — Was die übrigen Bedingungen in Nr. 46 anlangt, ſo müſſen dieſe offenbar in jedem einzelnen Falle beſonders unterſucht werden, weil man, wie dort gezeigt worden, dabei das vollſtändige Integral der durch die Variationsrechnung erhaltenen Differentialgleichung kennen muß. —

Beiſpiel I.

66. Zwiſchen zwei gegebenen Punkten, oder zwei gegebenen Curven die kürzeſte Linie zu finden. —

In dieſem Falle iſt:

$$\mu=1,\ \frac{d\mu}{dx}=0,\ \frac{d\mu}{dy}=0;$$

die Gleichung (C) gibt folglich:

$$\frac{1}{\varrho}=0,$$

oder:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=0,\ \frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

woraus durch Integration folgt:

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b; \tag{1}$$

alſo:

$$b\frac{dx}{ds} - a\frac{dy}{ds} = 0,$$

und endlich gibt eine zweite Integration:

$$bx - ay = c, \tag{2}$$

d. h. die Gleichung einer geraden Linie. —

Wenn die Grenzpunkte gegeben ſind, ſo hat man zur Beſtimmung der Conſtanten die Gleichungen:

$$bx_1 - ay_1 = c, \quad bx_0 - ay_0 = c$$

und:

$$a^2 + b^2 = 1,$$

wovon die letzte erhalten wird, wenn man die Gleichungen (1) quadrirt und addirt. — Wenn die geſuchte Linie von zwei gegebenen Curven begrenzt wird, deren Gleichungen folgende ſind:

$$y = f(x), \quad y = F(x),$$

ſo gibt die Bedingung, daß die erſte die letztern rechtwinklig durchſchneiden muß, die beiden Gleichungen:

$$\frac{a}{b} = -f'(x_1) = -F'(x_0),$$

welche mit den fünf Gleichungen:

$$y_1 = f(x_1), \quad y_0 = F(x_0),$$

$$bx_1 - ay_1 = c, \quad bx_0 - ay_0 = c,$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

zur Beſtimmung der ſieben Conſtanten:

$$x_1, \; y_1, \; x_0, \; y_0, \; a, \; b, \; c$$

genügen. —

Wenn die gegebenen Curven:

$$y = f(x), \quad y = F(x)$$

beſchaffen ſind, daß jede Linie, welche auf der erſten ſenkrecht iſt, es auch auf der andern iſt; ſo ſind dieſe Gleichungen nicht independent von einander, und es bleibt mithin eine der Conſtanten unbeſtimmt. — In dieſem Falle haben die Grenzcurven offenbar dieſelbe Evolute, und das zwiſchen ihnen liegende Stück der geſuchten Linie iſt für jeden Punkt daſſelbe. —

Beiſpiel 2.

67. Die Curve von der Beſchaffenheit zu finden, daß ſie durch Umdrehung um eine gegebene Axe die kleinſte Oberfläche erzeugt.

Wenn die Drehungsaxe zur Axe der x genommen wird, ſo wird die Größe der erzeugten Oberfläche durch $2\pi\int y ds$ ausgedrückt; das zu einem Minimum zu machende Integral iſt $\int y ds$, und man hat:

$$\mu = y, \quad \frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 1,$$

ſo daß die Gleichung (C) jetzt iſt:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{y}\cos\beta,$$

oder:

$$\varrho = -y\sec\beta = -y\operatorname{cosec}\alpha. \qquad \text{(a)}$$

Offenbar drückt $y\operatorname{cosec}\alpha$ die Länge der Normale der geſuchten Curve aus, welche mithin dem Krümmungshalbmeſſer gleich und von entgegengeſetzter Richtung iſt, worin eine bekannte Eigenſchaft der Kettenlinie beſteht, die mithin die geſuchte Curve iſt. Die Gleichung derſelben ergibt ſich leicht auf folgende Weiſe. Wenn:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{y}\cos\beta$$

ganz in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt wird, ſo ergibt ſich:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{y^2}\cdot\frac{dx^2}{ds^2}. \qquad \text{(b)}$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit $\frac{dx^2}{ds^2}$ und ſetzt für:

$$\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2$$

ſeinen Werth:

$$\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

ſo erhält man:

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dx^4}{ds^4};$$

alſo:

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\pm\frac{1}{y}\cdot\frac{dx^2}{ds^2}=\pm\frac{1}{y}\left(1-\frac{dy^2}{ds^2}\right).$$

Da der Krümmungshalbmeſſer und die Normale entgegengeſetzte Richtungen haben, ſo iſt die Curve gegen die Axe der x convex; folglich $\frac{d^2y}{dx^2}$ poſitiv, und da y ſtets poſitiv geſetzt wird; ſo iſt nur das obere Zeichen zuläſſig, und gibt:

$$y\frac{d^2y}{ds^2}=1-\frac{dy^2}{ds^2},\quad y\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1.$$

Integrirt man dieſe Gleichung und fügt eine arbiträre Conſtante hinzu, ſo erhält man:

$$y\frac{dy}{ds}=s+a,$$

und hieraus:

$$y^2=(s+a)^2+b^2.$$

Quadrirt man die vorletzte Gleichung und ſetzt $1-\frac{dx^2}{ds^2}$ für $\frac{dy^2}{ds^2}$, ſo findet man:

$$y^2\frac{dx^2}{ds^2}=y^2-(s+a)^2=b^2;$$

alſo:

$$dx=\frac{bds}{\sqrt{\{b^2+(s+a)^2\}}},$$

woraus ſich durch Integration ergibt:

$$x+c=bl\,[s+a+\sqrt{\{b^2+(s+a)^2\}}],$$

oder wenn man $s+a$ eliminirt:

$$x+c=bl\,\{y+\sqrt{(y^2-b^2)}\},$$

oder endlich in zweckmäßigerer Form:

$$x = bl \cdot \frac{1}{m} \left\{ \frac{y}{b} + \sqrt{\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)} \right\}. \qquad (c)$$

Dieſe Auflöſung enthält offenbar nur zwei arbiträre Conſtanten; aber zwei andere kommen in den vollſtändigen Werthen von x, y und λ als Functionen von s vor. Eine derſelben wurde dadurch ausgeſchloſſen, daß zwiſchen den beiden Fällen, wo die Länge der Curve gegeben iſt, und wo ſie nicht gegeben iſt, unterſchieden werden muß, — und die andere verſchwand bei der Elimination von s. — Dieſes letzte Reſultat war leicht vorherzuſehen; denn da s ſelbſt weder in μ, noch in der Bedingungsgleichung:

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$$

vorkommt, ſo iſt leicht einzuſehen, daß die Data der Aufgabe ſowohl, als das erhaltene Reſultat nicht geändert werden, wenn $s + \text{const}$ für s geſetzt wird. — Es war alſo zu erwarten, daß eine der arbiträren Conſtanten in dem Endreſultate nur in Verbindung mit s vorkommen, und mithin bei der Elimination s verſchwinden würde. — Wenn alſo die auf dieſe Weiſe hinausgefallenen beiden arbiträren Conſtanten in Rechnung gebracht werden, ſo enthält die allgemeine Auflöſung doch vier ſolcher Conſtanten, wie es nach dem allgemeinen Principe (S. 135) ſein muß. —

Um die arbiträren Conſtanten zu beſtimmen, wollen wir zunächſt den Fall betrachten, wo die Grenzpunkte gegeben ſind. — Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß die Grenzwerthe von y einander gleich ſind, und daß die Axe der y durch die Mitte der Verbindungslinie der Grenzpunkte der Curve geht. — Alsdann iſt:

$$y_0 = y_1, \quad x_0 = -x_1.$$

und da die Gleichung der Curve leicht auf die Form:

$$y = \tfrac{1}{2} b \left(m e^{\frac{x}{b}} + \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{b}} \right)$$

gebracht werden kann; ſo haben wir zur Beſtimmung der Conſtanten m und b die Gleichungen:

$$y_1 = \tfrac{1}{2} b \left(m e^{\frac{x_1}{b}} + \frac{1}{m} e^{-\frac{x_1}{b}} \right),$$

$$y_1 = \tfrac{1}{2} b \left(m e^{-\frac{x_1}{b}} + \frac{1}{m} e^{\frac{x_1}{b}} \right),$$

welche zunächſt geben $m = \pm 1$, wodurch ſich jede auf:

$$y_1 = \tfrac{1}{2} b \left(e^{\frac{x_1}{b}} + e^{-\frac{x_1}{b}} \right)$$

reducirt, worin b offenbar poſitiv genommen werden muß. — Es iſt leicht einzuſehen, daß dieſe Gleichung nicht für alle Werthesyſteme von y_1 und x_1 beſtehen kann. — Wenn z. B. $y_1 = 0$, $x_1 = a$ iſt, wo a eine endliche Größe bedeutet; ſo hat man die unmögliche Gleichung:

$$e^{\frac{2a}{b}} + 1 = 0.$$

Um die Grenzen zu finden, innerhalb welcher die Aufgabe möglich iſt, wollen wir annehmen, daß der Werth von y_1 gegeben ſei; d. h. man ſoll zwei gleiche Kreiſe, deren Ebene auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ſenkrecht iſt, durch eine Rotationsfläche verbinden, deren Flächeninhalt ein Minimum iſt. — Wenn der gegenſeitige Abſtand dieſer beiden Kreiſe eine gewiſſe Grenze überſchreitet, ſo geſtattet die Aufgabe keine Löſung — d. h. x_1 kann für einen gegebenen Werth von y_1 ein Maximum haben. — Setzt man nämlich $x = x_1$, $y = y_1$ und $m = 1$ in (c), ſo erhält man:

$$x_1 = bl \left\{ \frac{y_1}{b} + \sqrt{\left(\frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right)} \right\},$$

und wenn man $x_1 = m y_1$, $y_1 = nb$ ſetzt; ſo hat man:

$$mn = l \{ n + \sqrt{(n^2 - 1)} \},$$

worin m ein Maximum werden muß. — Differenzirt man alſo, und ſetzt $dm = 0$, ſo findet man:

$$\frac{n}{\sqrt{(n^2 - 1)}} = l \{ n + \sqrt{(n^2 - 1)} \}, \quad m = \frac{n}{\sqrt{(n^2 - 1)}}.$$

Die erſte dieſer beiden letzten Gleichungen gibt nahezu $n = 1{,}8$;

folglich ist nach der zweiten $\frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{m} = \sqrt{(n^2-1)} = 1,4968\ldots$

Wenn man also durch den Anfangspunkt der Coordinaten zwei Gerade zieht, welche mit der Axe der x Winkel bilden, deren trigonometrische Tangente $= 1,4968\ldots$ ist, d. h. Winkel von nahezu $72^0\,20'$; so gestattet die Aufgabe keine reelle Auflösung, wenn die Grenzpunkte der gesuchten Curve zwischen diesen Geraden und der Axe der x liegen. —

68. Wir wollen nun untersuchen, ob die gefundene Auflösung den übrigen Bedingungen eines wirklichen Minimums genügt. — Da die allgemeine Auflösung die Form hat:

$$y = \frac{1}{2} c_1 \left(c_2 e^{\frac{x}{c_1}} + \frac{1}{c_2} e^{-\frac{x}{c_1}} \right),$$

so hat man, wenn für c_1, c_2 resp. a, b gesetzt wird:

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{dy}{da} = \frac{1}{2}\left(be^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{a}} \right) - \frac{x}{2a}\left(be^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$\frac{dy}{dc_2} = \frac{dy}{db} = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{b^2} e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

folglich (S. 98):

$$u = C_1 \left(be^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{a}} \right) + \left(C_2 - C_1 \frac{x}{a} \right) \left(be^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{C_2}{a} - \frac{C_1 x}{a^2} \right) \left(be^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

oder wenn man für b seinen Werth setzt:

$$u = C_1 \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + \left(C_2 - C_1 \frac{x}{a} \right) \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \left(C_2 - C_1 \frac{x}{a} \right) \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right). \qquad \text{(d)}$$

Hieraus erhellet, daß kein endlicher Werth von x der Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = \infty$$

genügen kann, und mithin bleibt die zweite Variation endlich, wenn man C_1 und C_2 so bestimmen kann, daß u zwischen den Integrationsgrenzen nicht verschwindet. — Für $u=0$ hat man:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{\frac{x}{a}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)-\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}, \qquad (e)$$

so daß die Existenz eines kleinsten Werthes des gegebenen Integrales von der Möglichkeit abhängt, den Werth von $\frac{C_1}{C_2}$ so anzunehmen, daß kein zwischen den Integrationsgrenzen liegender Werth von x der vorhergehenden Gleichung genügt, was immer möglich ist, wenn nicht die rechte Seite der Gleichung (e) innerhalb der Integrationsgrenzen successive alle möglichen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt. —

Setzt man:

$$X=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{\frac{x}{a}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)-\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)},$$

so ist für $x=0$ auch $X=0$; bei zunehmenden positiven Werthen von x nimmt X negativ zu, und wenn x einen Werth x' erreicht, welche der Gleichung

$$\frac{x'}{a}\left(e^{\frac{x'}{a}}-e^{-\frac{x'}{a}}\right)-\left(e^{\frac{x'}{a}}+e^{-\frac{x'}{a}}\right)=0 \qquad (f)$$

genügt; so wird $X=-\infty$. Für negativ zunehmende Werthe von x nimmt X positiv zu, und wenn x einen Werth erreicht hat, welcher dem Werthe x' gleich und entgegengesetzt ist; so ist $X=+\infty$. Wenn es also zwischen den Integrationsgrenzen einen Werth von x gibt, welcher der Gleichung (f) genügt; so ist es nicht möglich, den Bedingungen der Jacobi'schen Theorie zu genügen, und folglich werden die Grenzen, zwischen welchen ein Minimumswerth der gegebenen Integrales möglich ist, gefunden, wenn man diese Gleichung für x auflöst. — Aber nach dem Frühern (S. 164) ergibt sich leicht, daß dieselbe Gleichung die Grenzen bestimmt, innerhalb welcher es möglich ist, den verschiedenen Bedingungen zu genügen, welche die Gleichung:

$$\delta U = 0$$

liefert. — Der Grund hiervon erhellet leicht aus der Schlußbemerkung zu Nr. 52; denn wie dort gezeigt worden, werden die Grenzen, zwiſchen welchen es möglich iſt, den Bedingungen der Jacobi'ſchen Theorie zu genügen, gefunden, wenn man die Punkte beſtimmt, wo zwei Wurzeln der Gleichung, welche die geſuchte Curve beſtimmt, einander gleich werden. — Da aber im Allgemeinen zwei Wurzeln einer Gleichung einander gleich werden, wenn ſie vom Reellen zum Imaginären übergehen; ſo iſt der Grund der Identität der erwähnten Gleichungen leicht einzuſehen. —

Beiſpiel 3.

69. Eine Curve von gegebener Länge und ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß ſie durch Umdrehung um eine gegebene Axe eine Oberfläche von dem kleinſten Flächeninhalte erzeugt. —

Nach dem früher (S. 155) Geſagten iſt klar, daß ſich die Auflöſung dieſer Aufgabe ganz einfach aus der der vorhergehenden ergibt, wenn man nur $y + c$ für y ſetzt, wo c eine neue willkürliche Conſtante iſt. — Dies gibt:

$$x = bl\frac{1}{m}\left\{\frac{y+c}{b} + \sqrt{\left(\frac{(y+c)^2}{b^2} - 1\right)}\right\},$$

ſo daß die geſuchte Curve eine Kettenlinie iſt. Die Gleichungen, welche die arbiträren Conſtanten beſtimmen, ſind dieſelben, wie in dem vorhergehenden Beiſpiele, wozu noch die Bedingung wegen der gegebenen Länge der Curve kommt. —

Beiſpiel 4.

70. Wenn μ eine homogene Function der Coordinaten x, y iſt, die Curve zu finden, welche das Integral:

$$\int \mu ds$$

zu einem Minimum macht. —

Obgleich die vollſtändige Integration der Gleichung (C) ohne nähere Beſtimmung der Form der Function μ nicht möglich iſt, ſo

kann man doch aus der allgemeinen Gleichung folgende geometrische Eigenschaft aller Curven dieser Klasse herleiten.

Es sei ACA' (Fig. 4) die Curve, deren Gleichung:

$$\mu = \text{const.}$$

ist, und MPM' die Minimumscurve, O der Anfangspunkt der Coordinaten, OL parallel zu der Tangente in C, PN die Normale der Curve MPM', und m der Grad der homogenem Function μ; so ist:

$$PN = -m\varrho.$$

Sind ferner x, y; x_1, y_1; x', y' resp. die Coordinaten der Punkte P, C, N, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{x - x'}{PN}, \quad \cos\beta = \frac{y - y'}{PN},$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (C) substituirt; so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{x\frac{d\mu}{dx} + y\frac{d\mu}{dy}}{PN}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{x'\frac{d\mu}{dx} + y'\frac{d\mu}{dy}}{PN}\right). \qquad (a)$$

Wenn μ_1 der Werth von μ nach der Substiuttion von x_1, y_1 für x, y ist, so hat man, weil ON zu der Tangente in C parallel ist:

$$x'\frac{d\mu_1}{dx_1} + y'\frac{d\mu_1}{dy_1} = 0. \qquad (b)$$

Da aber μ eine homogene Function ist, so ist offenbar:

$$\frac{d\mu_1}{dx_1} \cdot \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu_1}{dy_1} \cdot \frac{d\mu}{dx};$$

und folglich kann die Gleichung (b) auf die Form:

$$x'\frac{d\mu}{dx} + y'\frac{d\mu}{dy} = 0$$

gebracht werden. Weiter ist nach dem bekannten Euler'schen Theoreme über die homogenen Functionen:

$$x\frac{d\mu}{dx}+y\frac{d\mu}{dy}=m\mu,$$

und dies in Gleichung (a) ſubſtituirt, gibt:

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{m}{PN},\quad PN=-m\varrho.\quad *)$$

Aufgabe II.

71. Die Curve zu finden, für welche das Integral:

$$\int(\mu ds+\mu' dx),$$

worin μ, μ' gegebene Functionen der Coordinaten x, y ſind, zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Aufl. Wenn man daſſelbe Verfahren, wie bei der vorhergehenden Aufgabe anwendet; ſo kann das gegebene Integral auf die Form:

$$\int\left(\mu+\mu'\frac{dx}{ds}\right)ds$$

gebracht werden, und die Gleichungen (A) auf S. 130 werden in dieſem Falle:

$$\frac{d}{ds}\cdot\lambda\frac{dx}{ds}+\frac{d\mu'}{ds}=\frac{d\mu}{dx}+\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\mu'}{dx}$$

$$\frac{d}{ds}\cdot\lambda\frac{dy}{ds}=\frac{d\mu}{dy}+\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\mu'}{dy}.$$

Multiplicirt man dieſelben wieder reſp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und addirt die Produkte, ſo erhält man:

$$\frac{d\lambda}{ds}+\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\mu'}{ds}=\frac{d\mu}{ds}+\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\mu'}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{d\mu'}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}\right),$$

oder wegen:

$$\frac{d\mu'}{ds}=\frac{d\mu'}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{d\mu'}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}$$

*) Vergl. Note C.

auch:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\mu}{ds},\ \lambda = \mu,$$

wo die Conſtante aus dem in Aufg. I angegebenen Grunde hinweggelaſſen iſt. Subſtituirt man dieſen Werth und verfährt wieder wie früher, ſo findet man:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\mu}\left(\cos\alpha\,\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\,\frac{d\mu}{dy} + \frac{d\mu'}{dy}\right). \qquad (A)$$

Wenn die Grenzpunkte der geſuchten Curve auf zwei gegebenen Curven liegen müſſen, ſo iſt leicht einzuſehen, daß dieſe Punkte durch die Gleichungen:

$$\mu'_1 + \mu_1\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + \mu_1 m_1\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 = 0,$$

$$\mu'_0 + \mu_0\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \mu_0 m_0\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = 0$$

beſtimmt werden, indem die Gleichungen der Grenzcurven wieder ſind:

$$dy_1 = m_1\,dx_1,\quad dy_0 = m_0\,dx_0.$$

Wenn ω_1, ω_0 die Winkel bedeuten, unter welchen die geſuchte Curve ihre Grenzcurven ſchneidet, und θ_1, θ_0 die Winkel, welche die Tangenten an den Grenzcurven in den Durchſchnittspunkten mit der Axe der x bilden; ſo können die vorletzten Gleichungen offenbar auf die Form:

$$\begin{aligned} \mu_1\cos\omega_1 + \mu'_1\cos\theta_1 &= 0, \\ \mu_0\cos\omega_0 + \mu'_0\cos\theta_0 + 0 & \end{aligned} \qquad (B)$$

gebracht werden. —

Beiſpiel 1.

72. Zwiſchen zwei gegebenen Punkten, oder Curven eine Curve von gegebener Länge zu beſchreiben, welche ſo beſchaffen iſt, daß die zwiſchen ihr und ihrer Sehne liegende Fläche ein Maximum iſt. —

Dieſe Fläche wird offenbar ausgedrückt durch:

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)\,(x_1 - x_0),$$

und das Integral, welches nach der allgemeinen Auflösungsmethode isoperimetrischer Probleme zu einem Maximum zu machen ist, ist:

$$\int (y dx - a ds).$$

Es ist also jetzt $\mu = -a$, $\mu' = y$, und mithin:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} = \text{const.}$$

Die gesuchte Curve ist also ein Kreis.

Das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\varrho = a$$

ist bekanntlich:

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = a^2$$

und enthält drei willkürliche Constanten. Wenn die Endpunkte der Curve gegeben sind, so werden diese Constanten durch die drei Gleichungen:

$$(x_1 - b)^2 + (y_1 - c)^2 = a^2,$$
$$(x_0 - b)^2 + (y_0 + c)^2 = a^2$$

und:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{a}$$

bestimmt, wo σ die gegebene Länge des Kreisbogens bedeutet. —

Wenn die Endpunkte der gesuchten Curve auf gegebenen Curven liegen müssen, so sind die Gleichungen, welche der von der Aenderung der Grenzen herrührende Theil der Variation gibt, folgende:

$$\left\{y_1 - a\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)\right\}\delta x_1 - \left\{a\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0)\right\}\delta y_1 = 0,$$

$$\left\{y_0 - a\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)\right\}\delta x_0 - \left\{a\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0)\right\}\delta y_0 = 0,$$

und wenn die Gleichungen der Grenzcurven wieder sind:

$$dy_1 = m_1 dx_1, \quad dy_0 = m_0 dx_0,$$

ſo werden die vorhergehenden Gleichungen wegen:

$$\delta y_1 = m_1 \delta x_1, \quad \delta y_0 = m_0 \delta x_0$$

offenbar:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(y_1 - y_0) - \tfrac{1}{2} m_1 (x_1 - x_0) &= a \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + m_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \right\} \\ \tfrac{1}{2}(y_0 - y_1) - \tfrac{1}{2} m_0 (x_0 - x_1) &= a \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + m_0 \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \right\}. \end{aligned} \tag{a}$$

Um dieſe Gleichungen geometriſch zu interpretiren, ſeien P_1, P_0 (Fig. 5) die Endpunkte der Curve, O die Mitte ihrer geraden Verbindungslinie und $P_1 T_1$, $P_0 T_0$ Tangenten an den Grenzcurven in den Punkten P_1, P_0; ſo hat man für die Perpendikel Op_1 Op_0 aus O auf dieſe Tangenten:

$$Op_1 = \frac{\tfrac{1}{2}(y_0 - y_1) - \tfrac{1}{2} m_1 (x_0 - x_1)}{\sqrt{(1 + m_1^2)}},$$

$$Op_0 = \frac{\tfrac{1}{2}(y_1 - y_0) - \tfrac{1}{2} m_0 (x_1 - x_0)}{\sqrt{(1 + m_0^2)}}.$$

Ferner ſei C der Mittelpunkt des Kreiſes und $C\pi_1$, $C\pi_0$ ſeien Perpendikel aus demſelben auf die Tangenten $P_1 F_1$, $P_0 T_0$; ſo iſt offenbar:

$$\sin CP_1\pi_1 = -\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + m_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1}{\sqrt{(1 + m_1^2)}},$$

$$\sin CP_0\pi_0 = -\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + m_0 \left(\frac{dy}{ds}\right)_0}{\sqrt{(1 + m_0^2)}},$$

und die Gleichungen (a) werden folglich:

$$Op_1 = CP_1 \sin CP_1\pi_1 = C\pi_1,$$

$$Op_0 = CP_0 \sin CP_0\pi_0 = C\pi_0.$$

Dieſen Gleichungen zufolge fallen entweder die Punkte O und C zuſammen, oder die Tangenten $P_1 T_1$, $P_0 T_0$ ſind parallel zu OC. — Im erſten Falle iſt der Abſchnitt offenbar ein Halbkreis — und im zweiten Falle ſind die Tangenten $P_1 T_1$, $P_0 T_0$ ſenkrecht auf der ge-

en Verbindungslinie $P_1 P_0$ der Endpunkte, deren Länge folglich ſt ein Minimum iſt. —

Wenn die ganze zwiſchen der Curve, den Grenzordinaten und : Axe der x liegende Fläche ein Maximum werden ſoll, ſo iſt r zu einem Maximum zu machende Ausdruck blos:

$$\int_{x_0}^{x_1} (y dx - a ds),$$

dem das Glied:

$$\tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0)$$

hinweggelaſſen wird. — Die allgemeine Auflöſung iſt demnach wieder dieſelbe, wie früher, ausgenommen was die Grenzbedingungen betrifft. —

Wenn die Grenzpunkte der geſuchten Curve gegeben ſind, ſo werden die arbiträren Conſtanten wieder wie im vorhergehenden Falle durch Subſtitution der gegebenen Größen x_0, y_0; x_1, y_1 in die allgemeine Auflöſung gefunden. —

Wenn die Endpunkte der geſuchten Curve auf zwei gegebenen Curven liegen müſſen, ſo werden die Gleichungen (B) in Nr. 71 offenbar:

$$a \cos \omega_1 = y_1 \cos \theta_1,$$
$$a \cos \omega_0 = y_0 \cos \theta_0.$$

Wenn blos die Grenzwerthe von x gegeben ſind, d. h. wenn die Grenzcurven gerade, auf der Axe der x ſenkrechte Linien ſind; ſo iſt:

$$\cos \theta_1 = 0, \quad \cos \theta_0 = 0,$$

und die erſte der vorigen Gleichungen gibt entweder:

$$a \cos \omega_1 = 0, \quad \text{oder } y_1 = \infty.$$

Läßt man den letzten Werth, für welchen die geſuchte Fläche unendlich wird, unbeachtet; ſo hat man:

$$a \cos \omega_1 = 0,$$

und ebenſo:

$$a \cos \omega_0 = 0.$$

Aber es iſt leicht einzuſehen, daß dieſe Gleichungen nicht möglich ſind, und mithin die betrachtete Fläche kein endliches Maximum geſtattet. — Dieſer Fall iſt auch ſchon früher (Kap. 3 S. 55 u. 71) als ein Ausnahmefall der allgemeinen Theorie der Maxima und Minima angemerkt. —

73. Als einen mehr allgemeinen Fall wollen wir noch den betrachten, wo zwiſchen zwei gegebenen Curven eine Curve von gegebener Länge und ſolcher Beſchaffenheit beſchrieben werden ſoll, daß die zwiſchen ihr und einer andern, durch dieſelben Endpunkte gehenden Curve einer gegebenen Art liegende Fläche ein Maximum wird. —

Die Gleichung der zweiten Curve iſt offenbar von der Form:

$$y = F(x, x_0, x_1);$$

die von beiden Curven eingeſchloſſene Fläche wird ausgedrückt durch:

$$\int \{y - F(x, x_0, x_1)\}\, dx,$$

und der zu einem Maximum zu machende Ausdruck iſt:

$$\int [\{y - F(x, x_0, x_1)\}\, dx - a ds],$$

oder wenn man $\int F(x, x_0, x_1)\, dx = F_1(x, x_0, x_1)$ ſetzt:

$$\int (y dx - a ds) - F_1(x_1, x_0, x_1) + F_1(x_0, x_0, x_1).$$

Da alſo die unter dem Integralzeichen ſtehende Größe wieder dieſelbe, wie früher iſt, ſo iſt offenbar auch die Differentialgleichung der geſuchten Curve dieſelbe, und mithin letztere ein Kreis. — Was die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder betrifft, ſo hat man zunächſt die von $\int (y dx - a ds)$ herrührenden Glieder:

$$y_1 \delta x_1 - a \left\{ \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 \right\},$$
$$- y_0 \delta x_0 + \&c.$$

und es bleiben folglich nur noch die von:

$$- F_1(x_1, x_0, x_1) + F_1(x_0, x_0, x_1) = - \int_{x_0}^{x_1} F(x, x_0, x_1)\, dx$$

herrührenden Glieder zu unterſuchen übrig. —

Setzt man nun:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} F(x, x_0, x_1)\, dx,$$

ſo hat man:

$$\frac{du}{dx_0} = -F(x_0, x_0, x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\, dx,$$

$$\frac{du}{dx_1} = F(x_1, x_0, x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\, dx.$$

Da aber die gegebene zweite und die geſuchte Curve durch dieſelben beiden Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehen, ſo iſt offenbar:

$$y_0 = F(x_0, x_0, x_1),$$
$$y_1 = F(x_1, x_0, x_1);$$

folglich:

$$\frac{du}{dx_0} = -y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\, dx,$$

$$\frac{du}{dx_1} = y_1 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\, dx.$$

Die Totalvariation von u iſt daher:

$$\frac{du}{dx_0}\delta x_0 + \frac{du}{dx_1}\delta x_1 = \left(-y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\, dx\right)\delta x_0 + \left(y_1 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\, dx\right)\delta x_1.$$

Fügt man dieſelbe zu den ſchon gefundenen Gliedern hinzu, und ſetzt die ſich auf jede Grenze beziehenden Gliederaggregate $= 0$; ſo erhält man:

$$a\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left\{ a\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\, dx \right\} \delta x_0 = 0,$$

$$a\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left\{ a\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\, dx \right\} \delta x_1 = 0,$$

oder wenn die Gleichungen der Grenzcurven wieder:

$$dy_0 = m_0 dx_0, \quad dy_1 = m_1 dx_1$$

ſind:

$$a\left\{ m_0 \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \right\} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\, dx = 0,$$

$$a\left\{ m_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \right\} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\, dx = 0.$$

Wenn dieſe Gleichungen durch Einführung der Winkel ω_0, ω_1; θ_0, θ_1 wieder wie in der allgemeinen Aufgabe transformirt werden, ſo erhält man:

$$a\cos\omega_0 - \cos\theta_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\, dx = 0,$$

$$a\cos\omega_1 + \cos\theta_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\, dx = 0.$$

Beiſpiel 2.

74. Unter allen über einer gegebenen Baſis AB (Fig. 6) beſchriebenen iſoperimetriſchen Curven die Curve ACB zu finden, welche ſo beſchaffen iſt, daß die von einer zweiten Curve $AC'B$, deren Ordinate eine gegebene Function der entſprechenden Ordinate der erſten iſt, eingeſchloſſene Fläche ein Maximum wird. *) —

Wenn Y die gegebene Function iſt, ſo wird die zu einem Maximum zu machende Fläche offenbar ausgedrückt durch:

$$\int_{x_0}^{x_1} Y dx;$$

folglich iſt in der allgemeinen Gleichung von Aufg. II offenbar:

$$\mu = -a,\ \mu' = Y,$$

und mithin:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dY}{dy};$$

oder wenn man für ϱ ſeinen Werth als Function von x, y ſetzt und integrirt:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = \frac{Y}{a} + c.$$

Hieraus ergibt ſich leicht:

$$dx = \frac{\left(\frac{Y}{a}+c\right) dy}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{Y}{a}+c\right)^2\right\}}},$$

*) Dies iſt der erſte Fall des berühmten iſoperimetriſchen Problemes von Jac. Bernoulli. —

und folglich:

$$x + c' = \int \frac{\frac{Y}{a} + c}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{Y}{a} + c\right)^2\right\}}} dy,$$

woraus sich die Gleichung der gesuchten Curve ergibt, so bald die Form der Function Y bekannt ist. —

Wenn $Y = y$ ist, so sind die beiden Curven ACB, $AC'B$ identisch, und man kommt wieder auf Beisp. 1 zurück. —

Beispiel 3.

75. Eine Curve von gegebener Länge und solcher Beschaffenheit zu finden, daß das Volumen des durch ihre Umdrehung um eine gegebene Axe erzeugten Rotationskörpers ein Maximum ist. —

Da dieses Volumen bekanntlich durch $\pi \int y^2 dx$ ausgedrückt wird, so ist das zu einem Maximum zu machende Integral:

$$\int \left(y^2 \frac{dx}{ds} - a^2\right) ds,$$

wo a eine willkürliche Constante ist. —

Es ist also jetzt:

$$\mu = a^2,\ \frac{d\mu}{dx} = 0,\ \frac{d\mu}{dy} = 0,\ \mu' = y^2,\ \frac{d\mu'}{dy} = 2y,$$

und die Gleichung (A) wird folglich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2y}{a^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser der gesuchten Curve ist also der Ordinate derselben umgekehrt proportional. — Ein erstes Integral dieser Gleichung ergibt sich, wenn man für $\frac{1}{\varrho}$ seinen Werth:

$$\frac{-\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ oder } \frac{-\frac{pdp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ſetzt, wo $p = \frac{dy}{dx}$ iſt. Auf dieſe Weiſe erhält man:

$$-\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2ydy}{a^2},$$

oder wenn man integrirt und eine willkürliche Conſtante hinzufügt:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{y^2+b^2}{a^2}.$$

Die weitere Integration dieſer Gleichung iſt offenbar nicht thunlich.—

Beiſpiel 4.

76. Eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu finden: daß die Oberfläche des durch ihre Umdrehung erzeugten Körpers einen gegebenen Inhalt hat und das Volumen deſſelben ein Maximum iſt.

Das in dieſem Falle zu einem Maximum zu machende Integral iſt offenbar:

$$\int(y^2dx + aydz),$$

wo a eine arbiträre Conſtante iſt, und folglich hat man jetzt:

$$\mu = ay, \quad \frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = a, \quad \mu' = y^2, \quad \frac{d\mu'}{dy} = 2y.$$

Die Gleichung (A) wird folglich:

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{2}{a} + \frac{\cos\beta}{y};$$

alſo, weil die Normale $n = y\sec\beta$ iſt:

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{2}{a} + \frac{1}{n},$$

oder:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{n} = -\frac{2}{a}.$$

Da nun ϱ und n die Hauptkrümmungshalbmeſſer in jedem Punkte der Rotationsfläche ſind, ſo drückt dieſe Gleichung die Eigenſchaft aus: daß die Summe der Krümmungen in jedem Punkte

der Fläche dieſelbe iſt, und wir werden ſpäter ſehen, daß ſich dieſe Eigenſchaft auf einen allgemeinern Fall bezieht. — Es iſt leicht zu zeigen, daß für ein wirkliches Maximum a negativ ſein muß. — Denn wenn das urſprüngliche Integral auf die Form:

$$\int V dx = \int \{y^2 + ay\sqrt{(1+p^2)}\}\, dx$$

gebracht wird, ſo hat man:

$$\frac{d^2V}{dp^2} = \frac{ay}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soll nun das Integral ein Maximum werden, ſo muß dieſe Größe negativ ſein, und da y ſowohl als $\sqrt{(1+p^2)}$ poſitiv iſt; ſo muß a negativ ſein. — Setzt man alſo $-a$ ſtatt $+a$, ſo hat man:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{n} = \frac{2}{a},$$

oder wenn für $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{n}$ ihre reſp. Werthe:

$$\frac{-\frac{pdp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{y\sqrt{(1+p)^2}}$$

geſetzt werden, und endlich mit ydy multiplicirt wird; ſo findet man:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{ypdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2ydy}{a}.$$

Integrirt man dieſe Gleichung und fügt eine willkürliche Conſtante hinzu, ſo erhält man:

$$\frac{y}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{y^2+c}{a}.$$

Dieſe Gleichung kann im Allgemeinen nicht weiter integrirt werden.*) — Wir wollen aber annehmen, daß die Oberfläche eine geſchloſſene iſt, d. h. daß die Endpunkte der Curve, durch deren Umdrehung ſie entſteht, auf der Drehungsaxe liegen, oder daß die erzeugende Curve eine geſchloſſene iſt und ganz auf einer Seite der Axe der x liegt, ſo daß eine ringförmige Fläche entſteht. — In dem letzten Falle muß p offenbar für poſitive Werthe von y alle Werthe zwiſchen

*) Vergl. Note D.

$-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen, und wenn θ den Winkel bedeutet, welchen die Tangente in irgend einem Punkte mit der Axe der x macht; so kann die Gleichung:

$$\frac{y}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{y^2+c}{a}$$

auf die Form:

$$y^2 - ay\cos\theta + c = 0$$

gebracht werden. Da aber beide, demselben Werthe von θ entsprechende Werthe von y positiv sind; so muß c offenbar wesentlich positiv sein — und weil die Curve geschlossen und von endlicher Krümmung ist; so muß der Winkel θ durch alle Werthe von 0 bis 2π gehen. Es muß also wenigstens zwei Punkte der Curve geben, für welche $\cos\theta = 0$, und folglich:

$$y^2 + c = 0$$

ist, welche Gleichung aber nicht möglich ist, wenn c wesentlich positiv ist. — Die Gleichung:

$$\frac{y}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{y^2+c}{a}$$

kann folglich keine geschlossene, ganz auf derselben Seite der Axe der x liegende Curve ausdrücken — und wir müssen also annehmen, daß beide Endpunkte der erzeugenden Curve auf der Axe der Umdrehung liegen. — Alsdann muß das Integral dieser Gleichung so beschaffen sein, daß es den Werth $y = 0$ gestattet; aber da $\sqrt{1+p^2}$ niemals verschwinden kann, so kann diese Bedingung $y = 0$ nur erfüllt werden, wenn $c = 0$ gesetzt wird. — Alsdann reducirt sich die Gleichung auf:

$$y\sqrt{(1+p^2)} = a,$$

woraus folgt:

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}},$$

und durch Integration:

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2,$$

d. h. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Rota-

tionsaxe liegt. — Die Kugelfläche ist mithin die einzige geschlossene Rotationsfläche, welche die Eigenschaft hat: daß sie bei einer gegebenen Flächengröße das größte Volumen einschließt. —

Dieselben Schlüsse sind auch noch in der Voraussetzung anwendbar, daß nur der eine Endpunkt der erzeugenden Curve auf der Rotationsaxe liegt. — Wenn alsdann verlangt wird: über einem gegebenen Kreise ein geschlossenes Segment einer Rotationsfläche zu beschreiben, welches bei einer gegebenen Oberflächengröße das größte Volumen einschließt; so ist die gesuchte Fläche wieder eine sphärische. — In beiden Fällen wird der Halbmesser R der Kugel offenbar durch die gegebene Größe S der Oberfläche bestimmt. — Im ersten Falle der ganzen Kugel ist:

$$R^2 = \frac{S}{4\pi},$$

und wenn im zweiten Falle r der Halbmesser des Kreises ist, über welchem das Kugelsegment beschrieben werden soll; so findet man leicht:

$$R^2 = \frac{\frac{S}{4\pi}}{1 - \frac{\pi r^2}{S}}.$$

Wenn nicht dieser Kreis, sondern blos ein Durchschnitt einer gewissen Rotationsfläche gegeben ist, d. h. wenn das eine Ende der erzeugenden Curve auf einer gegebenen Curve liegt; so wird die erste der Gleichungen (B) in Nr. 71 offenbar:

$$ay_1 \cos\omega_1 = y_1^2 \cos\theta_1,$$

und gibt entweder $y_1 = 0$, oder $a\cos\omega_1 = y_1 \cos\theta_1$. — Das erste dieser Resultate bedeutet: daß beide Endpunkte der erzeugenden Curve auf der Rotationsaxe liegen, so daß man eine ganze Kugelfläche erhält, und das Volumen derselben ein absolutes Maximum ist. —

Um das zweite Resultat geometrisch zu interpretiren, sei BA (Fig. 7) die Rotationsaxe, P_1A die Grenzcurve, P_1 ihr Durchschnittspunkt mit dem erzeugenden Kreise, C der Mittelpunkt des letztern, P_1N die Normale und P_1Y die Ordinate der Grenzcurve im Punkte P_1; so hat man wegen $\omega_1 = CP_1N_1$, $\theta_1 = YP_1N$ offenbar:

$$\frac{CP_1}{YP_1} = \frac{a}{y} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\omega_1} = \frac{\cos YP_1N}{\cos CP_1N}.$$

Es iſt alſo in P_1 die Normale P_1N ſenkrecht auf der Rotationsaxe, d. h. P_1Y iſt eine größte, oder kleinſte Ordinate. — Wenn P_1N ein Minimum iſt, ſo ſieht man leicht ein, daß das Volumen des Segmentes ein abſolutes Maximum iſt — und wenn P_1Y ein Maximum iſt; ſo iſt dieſes Volumen ein relatives Minimum, d. h. ein Minimum, welches blos mit ähnlich beſchriebenen ſphäriſchen Segmenten und nicht mit Segmenten anderer Rotationsflächen verglichen wird. —

Aufgabe III.

77. Unter allen über derſelben Baſis AB (Fig. 8) beſchriebenen iſoperimetriſche Curven diejenige ACB zu finden, welche ſo beſchaffen iſt, daß die Fläche der Curve $AC'B$, deren Ordinate $C'D$ eine gegebene Function des Bogens AC iſt, ein Maximum wird.*) —

Aufl. Wenn S die gegebene Function bezeichnet, ſo wird die Fläche der Curve $AC'B$ offenbar ausgedrückt durch das Integral:

$$\int S\frac{dx}{ds}\,ds,$$

und mithin iſt nach der allgemeinen Theorie iſoperimetriſcher Probleme das zu einem Maximum zu machende Integral:

$$\int\left(S\frac{dx}{ds}+m\right)ds,$$

indem die Größen x, y wieder durch die Gleichung:

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1 \qquad (A)$$

miteinander verknüpft ſind. Wir haben daher:

$$V=S\frac{dx}{ds}+m,\quad N=0,\quad N'=0,\quad P_1=S,\quad P'_1=0,$$

$$\alpha=0,\quad \alpha'=0,\quad \beta=2\frac{dx}{ds},\quad \beta'=2\frac{dy}{ds}.$$

*) Dies iſt der zweite Fall von Jac. Bernoulli's iſoperimetriſchem Probleme. —

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichungen:

$$N + \lambda\alpha - \frac{d(P_1 + \lambda\beta)}{ds} = 0,$$

$$N' + \lambda\alpha' - \frac{d(P'_1 + \lambda\beta')}{ds} = 0,$$

und integrirt; ſo findet man:

$$S + 2\lambda\frac{dx}{ds} = a,$$

$$2\lambda\frac{dy}{ds} = b. \qquad \text{(B)}$$

Hieraus und aus Gleichung (A) folgt:

$$2\lambda = \sqrt{\{b^2 + (a - S')^2\}}.$$

Setzt man dieſen Werth in die Gleichungen (B) und integrirt, ſo ergibt ſich:

$$x + c = \int \frac{a - S}{\sqrt{\{b^2 + (a - S)^2\}}}\, ds,$$

$$y + d = \int \frac{b}{\sqrt{\{b^2 + (a - S)^2\}}}\, ds,$$

und wenn man s zwiſchen dieſen beiden letzten Gleichungen eliminirt; ſo erhält man die Gleichung der geſuchten Curve. —

Dieſe Auflöſung enthält offenbar vier arbiträre Conſtanten, wovon zwei durch die Bedingung beſtimmt werden, daß die geſuchte Curve durch die beiden gegebenen Punkte A, B gehen muß, während die dritte durch die gegebene Länge ACB und die vierte durch die Bedingung beſtimmt wird: daß die independente Veränderliche s von einem beſtimmten Punkte A aus gezählt wird. —

Es iſt mit keinen Schwierigkeiten verbunden, die obigen Formeln auf den ſpeciellen Fall $S = s$ anzuwenden, und daraus die Gleichung der Kettenlinie herzuleiten. —

Aufgabe VI.

78. Wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer einer ebenen Curve be-

deutet, und $\mu = \varphi(\varrho)$ iſt; die Curve zu finden, welche $\int \mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Aufl. Wenn wir wieder die Lagrange'ſche Methode anwenden, ſo haben wir:

$$\int \left\{ \delta\mu + \lambda \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\delta y}{ds} \right) \right\} ds = 0;$$

aber wegen:

$$\mu = \varphi(\varrho)$$

und:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2$$

iſt:

$$\delta\mu = \frac{d\mu}{d\varrho} \delta\varrho = -\mu' \varrho^3 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d^2\delta x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{ds^2} \right),$$

wenn $\frac{d\mu}{d\varrho} = \mu'$ geſetzt wird. — Hiernach geben die unter dem Integralzeichen ſtehenden Glieder offenbar die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2x}{ds^2}}{ds^2} + \frac{d \cdot \lambda \frac{dx}{ds}}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2y}{ds^2}}{ds^2} + \frac{d \cdot \lambda \frac{dy}{ds}}{ds} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

woraus ſich durch Integration ergibt:

$$\frac{d \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2x}{ds^2}}{ds} + \lambda \frac{dx}{ds} = a,$$

$$\frac{d \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2y}{ds^2}}{ds} + \lambda \frac{dy}{ds} = b,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \mu' \varrho^3 \cdot \frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d \cdot \mu' \varrho^3}{ds} + \lambda \frac{dx}{ds} &= a, \\ \mu' \varrho^3 \cdot \frac{d^3y}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d \cdot \mu' \varrho^3}{ds} + \lambda \frac{dy}{ds} &= b. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Multiplicirt man dieſe beiden letzten Gleichungen reſp. mit $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ und ſubtrahirt die Produkte; ſo erhält man:

$$\mu'\varrho^3\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)+\frac{d.\mu'\varrho^3}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)=a\frac{dy}{ds}-b\frac{dx}{ds}.$$

Integrirt man nochmals und fügt eine willkürliche Conſtante hinzu, ſo findet ſich:

$$\mu'\varrho^3\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)=ay-bx+c,$$

oder wegen:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} \qquad (\alpha)$$

endlich:

$$\mu'\varrho^2=ay-bx+c. \qquad (C)$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir zeigen, wie die Conſtanten a, b, c beſtimmt werden. —

Wenn die Grenzpunkte der Curve gegeben ſind, ſo daß man hat:

$$\delta x_1=0,\quad \delta y_1=0,\quad \delta x_0=0,\quad \delta y_0=0,$$

ſo ſind die außerhalb des Integralzeichens bleibenden Glieder:

$$\mu'_1\varrho_1^3\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{d\delta y}{ds}\right)_1,$$

$$\mu'_0\varrho_0^3\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{d\delta y}{ds}\right)_0,$$

und wenn man eine der Variationen, z. B. $\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1$, aus dem erſten Ausdrucke mittelſt der Gleichung:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1\cdot\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1+\left(\frac{dy}{ds}\right)_1\cdot\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1=0$$

fortſchafft; ſo erhält man:

$$\mu'_1\varrho_1^3\frac{\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)_1}{\left(\frac{dy}{ds}\right)_1}\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)$$

oder wegen (α):

$$\mu'_1 \varrho_1^2 \frac{\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1}{\left(\frac{dy}{ds}\right)_1}.$$

Da nun $\left(\frac{dy}{ds}\right)_1$ nicht unendlich werden kann, so kann dieſes Glied nur verſchwinden, wenn man $\mu'_1 \varrho^2_1 = 0$ ſetzt — und ebenſo iſt $\mu'_0 \varrho^2_0 = 0$. Dies gibt:

$$\begin{aligned} ay_1 - bx_1 + c &= 0, \\ ay_0 - bx_0 + c &= 0, \end{aligned} \qquad (D)$$

oder wenn (x_0, y_0) als Anfangspunkt und die gerade Verbindungslinie der gegebenen Punkte zur Axe der x genommen wird:

$$b = 0, \quad c = 0.$$

Die Gleichung (C) wird demnach:

$$\mu' \varrho^2 = ay. \qquad (E)$$

Da μ_1, und folglich auch μ'_1 eine Function von ϱ iſt, ſo gibt dieſe Gleichung den Werth von ϱ als Function von y. — Hieraus ſchließen wir: Die ebene Curve, welche $\int \varphi(\varrho)\, ds$, zwiſchen zwei gegebenen Punkten genommen, zu einem Maximum, oder Minimum macht, iſt ſo beſchaffen: daß alle Punkte von gleicher Krümmung von der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte gleichweit entfernt ſind. — Und da die Gleichungen (D) gleicherweiſe ſtattfinden, dieſe Punkte mögen gegeben ſein, oder nicht; ſo iſt leicht einzuſehen, daß dieſes Theorem auch noch ſtattfindet, wenn zwei feſte Curven für die feſten Punkte ſubſtituirt werden. —

Um die Gleichung der Curve in endlicher Form zu erhalten, werde (E) für $\frac{1}{\varrho}$ aufgelöſ't, und erhalten:

$$\frac{1}{\varrho} = Y.$$

Wird alsdann für $\frac{1}{\varrho}$ ſein Werth:

$$\frac{-\frac{pdp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gesetzt und integrirt, so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}} = \int Y dy = Y_1 + e;$$

folglich:

$$dx = \frac{(Y_1 + e)dy}{\sqrt{\{1-(Y_1+e)^2\}}},$$

und daher ist die gesuchte Gleichung der Curve:

$$x + f = \int \frac{(Y_1 + e)dy}{\sqrt{\{1-(Y_1+e)^2\}}}. \qquad (F)$$

Die Constanten e, f werden durch die Bedingung bestimmt, daß y für $x=0$, $x=x_1$ verschwinden muß, während die noch übrige Constante a von der Länge der Curve abhängt.

Wenn die gesuchte Curve nicht durch zwei feste Punkte, sondern durch zwei feste Curven begrenzt wird, deren Gleichungen sind:

$$dy_1 = m_1 dx_1, \quad dy_0 = m_0 dx_0;$$

so gehen die von den Variationen δx_1, δy_1 abhängigen Glieder:

$$\left(\frac{d \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2x}{ds^2}}{ds} + \lambda \frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{d \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2y}{ds^2}}{ds} + \lambda \frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1,$$

über in:

$$\left\{\left(\frac{d \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2x}{ds^2}}{ds} + \lambda \frac{dx}{ds}\right)_1 + m_1 \left(\frac{d \cdot \mu' \varrho^3 \frac{d^2y}{ds^2}}{ds} + \lambda \frac{dy}{ds}\right)_1\right\} \delta x_1,$$

und reduciren sich wegen der Gleichungen (B) auf:

$$(a + m_1 b)\, \delta x_1$$

Es ist mithin:

$$a + m_1 b = 0;$$

aber wenn die Verbindungsgerade der Endpunkte zur Axe der x ge-

nommen wird, so ist $b = 0$, und da nicht $a = 0$ sein kann; so muß $m_1 = \infty$ sein, und ebenso ergibt sich $m_0 = \infty$. — Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Curve ist mithin senkrecht auf den Tangenten der Grenzcurven in den Durchschnittspunkten. — Hieraus folgt: Die ebene Curve, welche das zwischen ihren Durchschnittspunkten mit zwei gegebenen Curven genommene Integral $\int \varphi(\varrho) ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht, schneidet diese Curven in zwei Punkten von solcher Beschaffenheit, daß der geradlinige gegenseitige Abstand derselben auch ein Maximum, oder Minimum ist. —

Wenn die gesuchte Curve die Grenzcurven berühren muß, so verschwindet in diesem Falle keine der Variationen:

$$\delta x_1,\ \delta y_1,\ \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1,\ \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1,\ \delta x_0,\ \delta y_0,\ \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0,$$

und die außerhalb des Integralzeichens stehenden Glieder geben offenbar die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\delta x_1 + b\delta y_1 + \mu'_1 \varrho_1^{\,3}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\,\frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{d\delta y}{ds}\right)_1 &= 0, \\ a\delta x_0 + b\delta y_0 + \mu'_0 \varrho_0^{\,3}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\,\frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{d\delta y}{ds}\right)_0 &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Sind nun:

$$y = f_1(x),\quad y = f_0(x). \qquad \text{(b)}$$

die Gleichungen der Grenzcurven, so hat man, weil sie die gesuchte Curve berühren soll:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1,\quad \frac{dy}{ds_0} = \left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 \left(\frac{dx}{ds}\right)_0. \qquad \text{(c)}$$

und da die Gleichungen (b), (c) immer stattfinden sollen, wie die Curve auch variirt werden mag; so folgt aus den Gleichungen (b):

$$\delta y_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 \delta x_1,\quad \delta y_0 = \left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 \delta x_0, \qquad \text{(d)}$$

und aus (c):

$$\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1 + \left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right)_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1$$

$$\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0 = \left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0 + \left(\frac{d^2 f_0}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 \qquad (e)$$

Man hat alſo:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0 = 0, \qquad (f)$$

und wenn man die Gleichungen (e), (f) für:

$$\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1, \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1, \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0, \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0$$

auflöſ't; ſo findet man:

$$\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1 = -\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right)_1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + \left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1} \delta x_1 = -\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right)_1 \delta x_1$$

$$\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1 = \frac{\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_1 \left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right)_1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + \left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1} \delta x_1 = \left(\frac{dx^3}{ds^3}\right)_1 \left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right)_1 \delta x_1 \qquad (g)$$

$$\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0 = \text{\&c.}, \quad \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0 = \text{\&c.}$$

Eliminirt man ferner die Variationen:

$$\delta y_1, \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_1, \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_1, \delta y_0, \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0, \left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0$$

aus den Gleichungen (d) und (g), ſo findet man:

$$a + b\left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 - \mu' \varrho_1{}^2 \left(\frac{d^2 f_0}{dx^2}\right)_1 \left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_1 = 0,$$

$$a + b\left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 - \mu' \varrho_0{}^2 \left(\frac{df_0}{ds^2}\right)_0 \left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_0 = 0,$$

oder wegen der Gleichung (C) auf S. 185:

$$a + b\left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 - (ay_1 - bx_1 + c)\left(\frac{d^2f_1}{dx^2}\right)_1\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_1 = 0,$$
$$a + b\left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 - (ay_0 - bx_0 + c)\left(\frac{d^2f_0}{dx^2}\right)_0\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_0 = 0. \qquad \text{(h)}$$

Um diese Gleichungen geometrisch zu interpretiren, sei AB (Fig. 18) die Gerade, deren Gleichung ist:

$$ay - bx + c = 0,$$

P_1 der Punkt (x_1, y_1), P_1N_1 die Normale der Grenzcurve, r_1 ihr Krümmungshalbmesser im Punkte P_1 und P_1p_1 ein Perpendikel auf AB; so hat man, weil sich die Curven in P_1 berühren:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)}\cos N_1P_1p_1 = a\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + b\left(\frac{dy}{ds}\right)_1,$$
$$\sqrt{(a^2 + b^2)}\,P_1p_1 = ay_1 - bx_1 + c,$$
$$\frac{1}{r_1} = -\left(\frac{d^2f_1}{dx^2}\right)_1\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_1.$$

Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (h), so erhält man:

$$r_1 = -P_1p_1 \sec N_1P_1p_1 = -P_1N_1,$$

und ebenso ist:

$$r_0 = -P_0p_0 \sec N_0P_0p_0 = -P_0N_0.$$

79. Ehe wir diesen Satz auf specielle Beispiele anwenden, müssen wir die in Nr. 23 angegebene Bedeutung der Worte: „Maximum" und „Minimum" wieder in Erinnerung bringen. — Diese Worte bedeuten nicht absolut größte, oder absolut kleinste Werthe, sondern nur Werthe, welche größer, oder kleiner sind, als alle andern Werthe, welche durch eine unendlich kleine Aenderung in irgend welchen der veränderlichen Elemente erzeugt werden können. — Wenn also bei einer Aufgabe z. B. die Krümmung in Betracht kommt, so ist wohl zu bemerken: daß die Curve, welche die Variationsrechnung als Auflösung gibt, nur mit Curven verglichen werden muß, welche aus ihr ohne eine plötzliche Aenderung der Krüm-

mung hergeleitet werden können. — Wenn man also durch die Variationsmethode als Auflösung einer solchen Aufgabe eine Curve gefunden hat, welche zwischen den betrachteten Endpunkten keine Spitze hat; so würde diese Auflösung deshalb nicht unrichtig sein, wenn sich eine Curve mit einer oder mehrern Spitzen zwischen ihren Endpunkten angeben ließe, welche die gegebene Function größer, oder kleiner machte, als jene. — Ebenso muß, wenn die durch die Variationsrechnung gefundene Curve eine gewisse Anzahl von Spitzen hat, sie nur mit Curven verglichen werden, welche eine gleiche Anzahl von Spitzen haben. — Dies ist umsomehr zu beachten, als eine plötzliche Aenderung in der Krümmung nicht nothwendig auch eine plötzliche Aenderung in der geometrischen Lage involvirt; d. h. die verschiedenen Punkte der Curve können denen der Curve, womit sie verglichen wird, noch unendlich nahe liegen, und man also meinen könnte, daß eine solche Vergleichung gestattet sei, was, wie wir gesehn haben, nicht richtig wäre, und wovon in dem folgenden Probleme ein Beispiel vorkommen wird. —

Beispiel.

80. Eine Curve von gegebener Länge und solcher Beschaffenheit zu finden: daß die Fläche zwischen ihr selbst, ihren beiden äußersten Krümmungshalbmessern und dem zwischen diesen liegenden Bogen der Evolute ein Minimum sei. —

Wenn ϱ wieder den Krümmungshalbmesser und ds das Curvenelement bezeichnen, so ist das Flächenelement offenbar $= \varrho ds$. — Wir brauchen also in der vorhergehenden Aufgabe nur zu setzen:

$$\mu = \varrho + m, \quad \mu' = 1,$$

um die Auflösung der vorliegenden Aufgabe zu erhalten. — Diese Substitutionen in die Gleichung (E) geben:

$$\varrho^2 = ay, \tag{a}$$

und die Gleichung mit endlichen Größen ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung (F) wie folgt:

Die Gleichung: $\varrho^2 = ay$

gibt:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{ay}};$$

mithin:

$$Y_1 = 2\sqrt{\frac{y}{a}};$$

folglich wird die Gleichung (F):

$$x + f = \int \frac{\left(2\sqrt{\frac{y}{a}} + e\right) dy}{\sqrt{\left\{1 - \left(2\sqrt{\frac{y}{a}} + e\right)^2\right\}}}.$$

Setzt man:

$$a = 4b, \quad e = \sin\alpha, \quad \sqrt{\frac{y}{b}} + e \sin\theta,$$

so erhält man:

$$x + f = 2b\int \sin\theta\,(\sin\theta - \sin\alpha)\,d\theta$$
$$= b(\theta - \sin\theta\cos\theta + 2\sin\alpha\cos\theta, \qquad \text{(b)}$$

und weil für $x = 0$, sowie für $x = x_1$ die Ordinate $y = 0$ sein muß:

$$f = b(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$x_1 + f = b(\pi - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Hieraus folgt:

$$b = \frac{x_1}{\pi - 2(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)},$$

wodurch die Constanten b, f mittelst α bestimmt werden, und die noch übrige Constante wird durch die gegebene Länge der Curve auf folgende Weise bestimmt: Wenn man die Gleichung (b) differenzirt, so erhält man:

$$dy = 2b(\sin\theta - \sin\alpha)\cos\theta d\theta,$$

$$dx = 2b(\sin\theta - \sin\alpha)\sin\theta d\theta,$$

woraus folgt:

$$ds = 2b(\sin\theta - \sin\alpha)\,d\theta.$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den Grenzen:

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \pi - \alpha$$

und bezeichnet die gegebene Länge der Curve mit $2s_1$; so hat man:

$$s_1 = 2b\{\cos\alpha + (\alpha - \tfrac{1}{2}\pi)\sin\alpha\},$$

oder wenn man für b seinen durch α ausgedrückten Werth setzt:

$$s_1 = 2x_1 \frac{\cos\alpha + (\alpha - \frac{1}{2}\pi)\sin\alpha}{\pi - 2(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)},$$

wodurch die Constante α bestimmt wird. —

Die Gleichung der Curve ergibt sich durch Elimination von θ zwischen den Gleichungen:

$$\frac{y}{b} = (\sin\theta - \sin\alpha)^2$$

und:

$$\frac{x}{b} = \theta - \alpha + \sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\cos\theta - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der geraden Verbindungslinie der Endpunkte der Curve verlegt wird, was geschieht, wenn man:

$$x + \tfrac{1}{2}x_1, \text{ oder } x + b\,(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

für x setzt; so wird die letzte Gleichung:

$$\frac{x}{b} = \theta + (2\sin\alpha - \sin\theta)\cos\theta - \tfrac{1}{2}\pi$$

oder:

$$\frac{x}{b} + \text{arc.cos}\left(\sin\alpha + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)$$

$$= \left(\sin\alpha - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)\sqrt{\left\{1 - \left(\sin\alpha + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2\right\}}.$$

Aus dem ersten Integrale der Gleichung:

$$\varrho^2 = 4by$$

ergibt sich eine merkwürdige geometrische Eigenschaft der Curven dieser Klasse. Substituirt man nämlich für $\frac{1}{\varrho}$ wieder seinen Werth:

$$\frac{-\frac{pdp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und integrirt; ſo erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}} = \sqrt{\frac{y}{b}} + e,$$

oder wenn man durch y dividirt und für $\frac{1}{y\sqrt{(1+p^2)}}$, $\frac{1}{\sqrt{by}}$ ihre reſp. Werthe $\frac{1}{\text{Norm.}} = \frac{1}{n}$, $\frac{2}{\varrho}$ ſetzt:

$$\frac{1}{n} = \frac{2}{\varrho} + \frac{e}{y}.$$

81. Wenn die Länge der Curve zwiſchen den feſten Punkten nicht gegeben iſt, d. h. wenn unter allen Curven, welche zwiſchen dieſen Punkten beſchrieben werden können, die geſuchte wird, für welche die oben erwähnte Fläche ein Minimum iſt; ſo wird die Conſtante α beſtimmt, wenn dieſe Fläche durch α ausgedrückt und ihr Differential $= 0$ geſetzt wird. — Nun iſt aber:

$$\varrho ds = 2\sqrt{by}\sqrt{(1+p^2)}\,dx = \frac{2\sqrt{by}\sqrt{(1+p^2)}\,dy}{p}$$

$$= 2b \cdot \frac{\sqrt{\frac{y}{b}}\,dy}{\sqrt{\left\{1-\left(\sqrt{\frac{y}{b}}+e\right)^2\right\}}},$$

und wenn man wieder ſetzt:

$$\sqrt{\frac{y}{b}} + e = \sin\theta, \text{ und } e = \sin\alpha,$$

ſo erhält man:

$$\int \varrho ds = 4b^2 \int (\sin\theta - \sin\alpha)^2 d\theta$$

$$= 2b^2\{\theta(1+2\sin^2\alpha) - \sin\theta\cos\theta + 4\sin\alpha\cos\theta\}.$$

Da ferner das Maximum von y dem Winkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ entſpricht, ſo iſt leicht einzuſehen, daß der Werth der fraglichen Fläche ausgedrückt wird durch:

$$8b^2 . \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \sin\alpha)^2 \, d\theta$$

$$= 4b^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(1 + 2\sin^2\alpha) - 3\sin\alpha\cos\alpha \right\},$$

oder wenn für b sein Werth in α und $\frac{\pi}{2} - \beta$ für α gesetzt wird:

$$\text{Fläche} = x_1^2 . \frac{\beta(1 + 2\cos^2\beta) - 3\sin\beta\cos\beta}{(\beta - \sin\beta\cos\beta)^2} .$$

Setzt man endlich das Differential des Logarithmus dieses Ausdruckes $= 0$, so ergibt sich:

$$\frac{\sin\beta(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{\beta + 2\beta\cos^2\beta - 3\sin\beta\cos\beta} = \frac{\sin^2\beta}{\beta - \sin\beta\cos\beta}.$$

Läßt man den Werth $\beta = 0$, für welchen b sowohl, als die fragliche Fläche unendlich wird, unbeachtet, und schafft die Brüche fort; so findet man:

$$\cos\beta(\beta\sin\beta\cos\beta + \beta^2 - 2\sin^2\beta) = 0.$$

Dieser Gleichung wird durch:

$$\cos\beta = 0, \text{ oder } \beta\sin\beta\cos\beta + \beta^2 - 2\sin^2\beta = 0$$

genügt; allein es ergibt sich leicht, daß diese letzte Gleichung unmöglich ist, *) weil die linke Seite derselben stets einen positiven Werth hat. — Es muß also sein:

$$\cos\beta = \sin\alpha = 0.$$

die Gleichung:

---

*) Denn multiplicirt man sie mit 4 und setzt man $2\beta = \theta$, so wird der erste Theil:

$$u = \theta^2 + \theta\sin\theta + 4\cos\theta - 4.$$

und wenn für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ ihre Reihenentwickelungen:

$$\theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

und:

$$1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}} = \sqrt{\frac{y}{b}} + c$$

wird alſo:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}} = \sqrt{\frac{y}{b}}$$

oder:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(by - y^2)}},$$

d. h. die Gleichung einer Cycloide — und da für jeden Endpunkt $\varrho = 0$ iſt; ſo iſt einleuchtend, daß die Curve eine vollſtändige Cycloide iſt. —

Wenn ACB (Fig. 9) die in Rede ſtehende Cycloide darſtellt, ſo iſt die geſuchte Minimumsfläche $= \frac{3}{4}\frac{AB^2}{\pi}$; aber wenn Bb unendlich klein iſt, und über Ab, bB Cycloiden beſchrieben werden; ſo iſt die aus dieſen beiden Cycloiden beſtehende Curve der ACB unendlich nahe, d. h. die entſprechenden Punkte beider liegen einander unendlich nahe. — Die Fläche der erſten iſt aber $= \frac{3}{4}\frac{Ab^2 + bB^2}{\pi}$; alſo offenbar kleiner als $\frac{3}{4}\frac{AB^2}{\pi} = \frac{4}{3}\frac{(Ab+bB)^2}{\pi} = \frac{3}{4}\frac{Ab^2+2Ab.bB+bB^2}{\pi}$,

---

geſetzt werden; ſo erhellet auf der Stelle, daß u für kleine Werthe von θ poſitiv iſt. — Für $\theta = 0$ verſchwindet aber u, und wenn es für irgend einen andern Werth $\theta = \theta_1$ verſchwindet; ſo muß es auch für irgend einen zwiſchen 0 und θ_1 liegenden Werth ein Maximum erreichen. Für dieſen Zwiſchenwerth hat man mithin:

$$\frac{du}{d\theta} = 2\theta + \theta\cos\theta - 3\sin\theta = 0.$$

Die linke Seite dieſer letzten Gleichung verſchwindet ebenfalls für $\theta = 0$ und iſt poſitiv für kleine Werthe von θ, und wenn ſie auch für einen andern Werth θ' von θ verſchwindet; ſo muß man für einen zwiſchen 0 und θ' liegenden Werth haben:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 2(1 - \cos\theta) - \theta\sin\theta = 0,$$

oder: $\frac{1}{2}\theta - \mathit{tang}\,\frac{1}{2}\theta = 0$, welche Gleichung offenbar für jeden andern Werth von θ als $\theta = 0$ unmöglich iſt. —

so daß also die durch die Variationsrechnung gefundene Fläche $\frac{3AB^2}{4\pi}$ nicht die absolut kleinste wäre. — Gleichwohl ist diese Fläche ein wirkliches Minimum im wahren Sinne des Wortes (Nr. 79); denn die Curve $AC'bcB$ hat in b eine Spitze, und kann mithin nicht aus ACB durch eine zulässige unendlich kleine Variation abgeleitet werden, weil in dem Punkte b eine Krümmungsänderung erfordert wird, die nicht unendlich klein ist. — In der That sind die Variationen δy und $\delta\varrho$ an dieser Stelle von verschiedenen Größenordnungen.*)

Aufgabe V.

82. Die Curve zu finden, welche das Integral $\int\mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht, indem ds das Element einer auf einer gegebenen Fläche beschriebenen Curve und μ eine gegebene Function der Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben bedeuten. —

Aufl. Wir wollen wieder die Lagrange'sche Methode anwenden, indem wir x, y, z als Functionen von s ansehen, welche durch die Gleichung:

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1 \qquad (A)$$

verknüpft sind, und $u=0$ sei die Gleichung der gegebenen Fläche. — Wenn alsdann λ und λ' die unbestimmten Multiplicatoren für diese beiden Gleichungen bezeichnen, so ist die vollständige oder totale Variation des Integrales $\int\mu ds$ offenbar:

$$\int\Big\{\Big(\frac{d\mu}{dx}+\lambda'\frac{du}{dx}\Big)\delta x+\Big(\frac{d\mu}{dy}+\lambda'\frac{du}{dy}\Big)\delta y+\Big(\frac{d\mu}{dz}+\lambda'\frac{du}{dz}\Big)\delta z$$

$$+\lambda\Big(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{ds}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\delta z}{ds}\Big)\Big\}ds.$$

Wenn man die letzten drei Glieder derselben theilweise integrirt, und die Coefficienten von δx, δy, δz einzeln $=0$ setzt; so erhält man die drei Gleichungen:

---

*) Die Bemerkung des Verf's. in Nr. 79 ist allerdings richtig; aber dieses Erläuterungsbeispiel derselben durchaus nichtssagend, weil die unendlich kleinen Glieder von der ersten und zweiten Ordnung $2Ab.bB$ und bB^2 neben dem endlichen Gliede Ab^2 gar nicht in Betracht kommen. — S.

$$\frac{d\mu}{dx}+\lambda'\frac{du}{dx}-\frac{d}{ds}.\lambda\frac{dx}{ds}=0,$$

$$\frac{d\mu}{dy}+\lambda'\frac{du}{dy}-\frac{d}{ds}.\lambda\frac{dy}{ds}=0, \qquad (B)$$

$$\frac{d\mu}{dz}+\lambda'\frac{du}{dz}-\frac{d}{ds}.\lambda\frac{dz}{ds}=0.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen reſp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, addirt die Produkte und beachtet die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{d\mu}{dx}.\frac{dx}{ds}+\frac{d\mu}{dy}.\frac{dy}{ds}+\frac{d\mu}{dz}.\frac{dz}{ds}=\frac{d\mu}{ds},$$

$$\frac{dx}{ds}.\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}.\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}.\frac{d^2z}{ds^2}=0;$$

ſo findet man:

$$\frac{d\mu}{ds}-\frac{d\lambda}{ds}=0, \quad \lambda=\mu+a.$$

Wenn die Länge der Curve nicht gegeben iſt, ſo ergibt ſich durch ähnliche Betrachtungen, wie in Aufg. I, daß $a=0$, und mithin $\lambda=\mu$ ſein muß. — Die drei Gleichungen (B) werden daher:

$$\frac{d\mu}{dx}+\lambda'\frac{du}{dx}-\mu\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}.\frac{d\mu}{ds}=0,$$

$$\frac{d\mu}{dy}+\lambda'\frac{du}{dy}-\mu\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}.\frac{d\mu}{ds}=0, \qquad (C)$$

$$\frac{d\mu}{dz}+\lambda'\frac{du}{dz}-\mu\frac{d^2z}{ds^2}.\frac{dz}{ds}.\frac{d\mu}{ds}=0.$$

Wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Coordinatenebenen mit dem die Curve in irgend einem Punkte berührenden Normalſchnitte der Fläche bilden; ſo hat man:

$$\cos\alpha\frac{du}{dx}+\cos\beta\frac{du}{dy}+\cos\gamma\frac{du}{dz}=0,$$

und:

$$\cos\alpha\frac{dx}{ds}+\cos\beta\frac{dy}{ds}+\cos\gamma\frac{dz}{ds}=0,$$

weil die Ebene des Normalſchnittes durch die Tangente der Curve geht. — Multiplicirt man alſo die Gleichungen (C) reſp. mit:

$$\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma$$

und addirt die Produkte; ſo erhält man offenbar:

$$\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}$$

$$-\mu\left(\cos\alpha\frac{d^2x}{ds^2}+\cos\beta\frac{d^2y}{ds^2}+\cos\gamma\frac{d^2z}{ds}\right)=0. \qquad (D)$$

Aber wenn α', β', γ' die Winkel bedeuten, welche der Krümmungshalbmeſſer ϱ der Curve mit den Coordinatenaxen macht; ſo hat man bekanntlich:

$$\cos\alpha'=-\varrho\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\cos\beta'=-\varrho\frac{d^2y}{ds^2},$$

$$\cos\gamma'=-\varrho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Die Gleichung (D) kann daher auf die Form:

$$\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}$$

$$=\frac{\mu}{-\varrho}(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'). \qquad (E)$$

gebracht werden. — Iſt ferner ω der Winkel zwiſchen der Oskulationsebene der Curve und der Ebene des Normalſchnittes der Fläche, ſo hat man:

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=\sin\omega,$$

und nach dem Meunier'ſchen Theoreme:

$$\sin^2\omega = 1 - \frac{\varrho'^2}{\varrho^2},$$

wo ϱ' der Krümmungshalbmeſſer des Normalſchnittes iſt. — Man kann demnach der Gleichung (E) eine der drei folgenden Formen geben:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\mu^2}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right)^2,$$

$$\frac{\sin\omega}{-\varrho} = \frac{1}{\mu}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right), \qquad (F)$$

$$\frac{\tan\omega}{-\varrho'} = \frac{1}{\mu}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right).$$

Wenn $\int\frac{ds}{\mu}$ das gegebene Integral iſt, ſo ergibt ſich, wie in dem Falle einer ebenen Curve (Nr. 63), daß die erſte dieſer letzten Gleichungen ganz ungeändert bleibt — und daraus ſchließen wir wieder:

Wenn die auf einer gegebenen Fläche beſchriebene Curve, deren Gleichung:

$$\varrho = f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)$$

iſt, die Eigenſchaft hat: das Integral $\int\mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum zu machen; ſo hat die Curve, deren Gleichung:

$$\varrho = -f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)$$

iſt, die Eigenſchaft: daß ſie das Integral $\int\frac{ds}{\mu}$ zu einem Maximum, oder Minimum macht. — Ein merkwürdiges Beiſpiel hiervon wird ſpäter bei den mechaniſchen Anwendungen der Variationsrechnung vorkommen. —

Was die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder betrifft, ſo ſieht man leicht ein, daß ſie folgende Gleichungen:

$$\mu_1\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1\delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1\delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1\delta z_1\right\} = 0,$$

$$\mu_0\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0\delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0\delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0\delta z_0\right\} = 0 \qquad (G)$$

geben. —

(1) Wenn die Grenzpunkte der Curve feſt liegen, ſo werden dieſe Gleichungen von ſelbſt erfüllt, weil:

$$\delta x_1 = 0,\ \delta y_1 = 0,\ \delta z_1 = 0,\ \delta x_0 = 0,\ \delta y_0 = 0,\ \delta z_0 = 0.$$

(2) Wenn dieſe Punkte nicht gegeben ſind, ſondern nur auf gegebenen, auf der gegebenen Fläche liegenden Curven bleiben müſſen, deren Gleichungen ſind:

$$dx_1 = m_1 dz_1, \qquad dx_0 = m_0 dz_0,$$
$$dy_1 = n_1 dz_1, \qquad dy_0 = n_0 dz_0,$$

ſo muß man offenbar haben:

$$\delta x_1 = m_1 \delta z_1, \qquad \delta x_0 = m_0 \delta z_0,$$
$$\delta y_1 = n_1 \delta z_1, \qquad \delta y_0 = n_0 \delta \delta z_0,$$

und folglich werden die Gleichungen (G) jetzt:

$$\mu_1 \left\{ m_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + n_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \right\} = 0,$$
$$\mu_0 \left\{ m_0 \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + n_0 \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \right\} = 0.$$

Wenn alſo die Annahmen $u_1 = 0$. $u_0 = 0$ bei Seite geſetzt werden, ſo folgt hieraus: „Wenn eine auf einer gegebenen Fläche beſchriebene Curve ſo beſchaffen iſt, daß ſie das Integral $\int \mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht; ſo ſchneidet ſie ihre Grenzcurven unter rechten Winkeln.“ —

83. Die Gleichungen der Curve, welche das Integral $\int \mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht, können auch in folgender Weiſe ausgedrückt werden.

Die Gleichung der gegebenen Fläche ſei:

$$dz = p dx + q dy,$$

ſo muß man, weil die Coſinus der Winkel, welche die Oskulationsebene mit den Coordinatenebenen macht, durch:

$$\varrho \left(\frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} \right),$$
$$\varrho \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \right),$$
$$\varrho \left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \right)$$

ausgedrückt werden, offenbar haben:

$$\sin\omega = \frac{\varrho\left\{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-p\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)-q\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\}}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

Setzt man dieſen Werth in die zweite der Gleichungen (F) und eliminirt $\frac{d^2x}{ds^2}$, oder $\frac{d^2y}{ds^2}$ mittelſt der Gleichung:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0;$$

ſo kann die geſuchte Curve durch die eine, oder die andere der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2}+p\frac{d^2z}{ds^2}&=\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\mu}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right)\frac{dy}{ds},\\ \frac{d^2y}{ds^2}+q\frac{d^2z}{ds^2}&=-\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\mu}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right)\frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{H})$$

ausgedrückt werden, wenn man damit die Gleichung der gegebenen Fläche verbindet. —

84. Wenn man von demſelben Punkte O (Fig. 10) einer Fläche nach zwei einander unendlich nahen Punkten T, T' einer gegebenen Curve zwei Curven OT, OT' auf dieſer Fläche zieht, wovon jede die Eigenſchaft hat: das Integral $\int\mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum zu machen, und es bezeichnet $d\sigma$ den Bogen TT', ſo wie θ den Winkel OTT'; ſo wird die Differenz der Werthe des Integrales an der Grenze für dieſe Curven ausgedrückt durch:

$$\mu_1\cos\theta d\sigma,$$

wo μ_1 der Werth von μ für jeden der einander unendlich nahen Punkte T, T' iſt. — Denn da jede dieſer Curven das Integral zu einem Maximum, oder Minimum macht; alſo die Variation unter dem Zeichen $\int$ verſchwindet, und außerdem einer der Grenzpunkte feſt liegt; ſo iſt klar, daß die Totalvariation, welche das Integral bei dem Uebergange von OT zu OT' erfährt, ausgedrückt wird durch:

$$\lambda_1 \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 \right\}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden ist $\lambda = \mu$, und da sich die Werthe von x_1, y_1, z_1 ändern, wenn man von einem Punkte der Curve zu dem folgenden übergeht; so ist offenbar:

$$\delta x_1 = \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_1 d\sigma, \quad \delta y_1 = \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_1 d\sigma, \quad \delta z_1 = \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_1 d\sigma.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird die Totalvariation:

$$\mu_1 \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \right\} d\sigma,$$

woraus wegen:

$$\cos\theta = \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_1$$

folgt: $\mu_1 \cos\theta \, d\sigma$, wie bewiesen werden sollte. —

85. Wenn μ eine homogene Function von x, y, z ist, so ergibt sich ein ähnliches Theorem, wie das in Nr. 70 für ebene Curven bewiesene.

Wir wollen den Durchschnitt der Normalebene der Curve mit der Tangentialebene der Fläche die Normale der Curve nennen; so ist diese Normale offenbar senkrecht auf der Ebene des vorhin erwähnten Normalschnittes, und macht mithin die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenaxen. — Es sei eine Fläche beschrieben, deren Gleichung $\mu = c$ ist, und eine Ebene gelegt durch den Anfangspunkt, welche in Bezug auf diese Fläche zu der vom Anfangspunkte nach dem Punkte der Curve gezogenen geraden Linie conjugirt ist,*) und die Normale der Curve soweit verlängert, bis sie diese Ebene trifft; so hat man, wenn diese verlängerte Linie mit n bezeichnet wird, offenbar:

$$\cos\alpha = \frac{x - x'}{n}, \quad \cos\beta = \frac{y - y'}{n}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z'}{n},$$

*) d. h. parallel zu der Berührungsebene der Fläche $\mu = c$ in dem Punkte, wo die Linie, zu welcher sie conjugirt ist, die Fläche trifft. — Da μ eine homogene Function ist, so gibt es offenbar nur eine solche Ebene. —

wo (x', y', z') der Punkt ist, wo die Linie n die conjugirte Ebene trifft. — Die Gleichung (F) kann daher auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{n \sin \omega}{-\varrho} = \frac{1}{\mu}\left\{\left(x\frac{d\mu}{dx} + y\frac{d\mu}{dy} + z\frac{d\mu}{dz}\right) - \left(x'\frac{d\mu}{dx} + y'\frac{d\mu}{dy} + z'\frac{d\mu}{dz}\right)\right\};$$

aber da (x', y', z') ein Punkt in der conjugirten Ebene ist, so hat man, wie in Nr. 70:

$$x'\frac{d\mu}{dx} + y'\frac{d\mu}{dy} + z'\frac{d\mu}{dz} = 0,$$

und wenn μ eine homogene Function $m$ten Grades ist:

$$x\frac{d\mu}{dx} + y\frac{d\mu}{dy} + z\frac{d\mu}{dz} = m\mu,$$

folglich:

$$n \sin \omega = m\varrho.$$

Unter Beibehaltung der obigen Definitionen hat man also das folgende Theorem:

Wenn μ eine homogene Function des $m$ten Grades von den Coordinaten eines Punktes einer gegebenen Fläche ist, so ist die Curve, welche $\int \mu ds$ zu einem Maximum, oder Minimum macht, so beschaffen: daß die Projection der Normale in jedem Punkte auf die Oskulationsebene dem $m$fachen Krümmungshalbmesser gleich ist. —

Durch eine ähnliche Substitution wird die erste der obigen Gleichungen (F) auf:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

reducirt.

Jedes dieser Theoreme gibt das Mittel an die Hand: die Oskulationsebene und den Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkte zu erhalten, wenn die Richtung der Tangente bekannt ist. —

Beispiel.

86. Die kürzeste Linie zu finden, welche auf einer gegebenen

Oberfläche zwiſchen zwei auf derſelben liegenden Punkten gezogen werden kann. —

Dies iſt der einfachſte Fall der vorhergehenden Aufgabe, nämlich wenn $\mu = 1$ iſt. — Es iſt folglich:

$$\frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 0, \quad \frac{d\mu}{dz} = 0,$$

und aus den Gleichungen (F) ergibt ſich ſofort:

$$\varrho = \varrho', \quad \omega = 0.$$

Der Krümmungshalbmeſſer der Curve iſt alſo derſelbe, als der des Normalſchnittes, welcher ſie berührt, oder mit andern Worten: die Oskulationsebene iſt in jedem Punkte *ſenkrecht* auf der krummen Fläche. —

Da eine vollſtändige Unterſuchung der Eigenſchaften *kürzeſter* oder *geodätiſcher* Linien auf krummen Flächen für ein Werk, wie das unſrige, welches ſich nur mit den wichtigſten *Grundlehren der* Variationsrechnung und deren Anwendung zu befaſſen hat, viel zu weitſchichtig iſt; ſo begnügen wir uns mit der Entwickelung einiger der wichtigſten dieſer Eigenſchaften geodätiſcher Linien. —

(1) Die Gleichungen der geodätiſchen Linie, wenn der Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, ergeben ſich leicht aus den allgemeinen Gleichungen (H), wenn man ſetzt:

$$\mu = 1, \quad \frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 0, \quad \frac{d\mu}{dz}.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man:

$$\frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$\frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{du}{dy}, \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

oder wenn:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

die Gleichung der gegebenen Oberfläche iſt:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} + q\frac{d^2z}{ds^2} = 0. \qquad (a)$$

(2) Aus dieſen Gleichungen laſſen ſich leicht die herleiten, worin x die *independente* Veränderliche iſt; allein es iſt vielleicht noch einfacher, ſie ſofort aus der Bemerkung abzuleiten: daß die Oskulationsebene in allen Punkten auf der Oberfläche *ſenkrecht* iſt. — Wenn die Gleichung der Oberfläche iſt:

$$dz = pdx + qdy,$$

ſo ergibt ſich aus dieſer Bemerkung:

$$p(dyd^2z - dzd^2y) + q(dzd^2x - dxd^2z) = dxd^2y - dyd^2x.$$

Setzt man nun $d^2x = 0$, und ſubſtituirt für dz, d^2z ihre durch die Gleichungen:

$$dz = pdx + qdy,$$
$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 + qd^2y$$

gegebenen Werthe; ſo erhält man die Gleichung:

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(q - p\frac{dy}{dx}\right)\left(r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0, \qquad (b)$$

welche in Verbindung mit der Gleichung:

$$dz - pdx - pdy = 0$$

die geodätiſche Linie ausdrückt. —

(3) Wenn man von demſelben Punkte 0 (Fig. 10) auf einer Fläche nach zwei *unendlich nahen* Punkten T, T' einer Curve geodätiſche Linien zieht, $d\sigma = TT'$ und $\theta = TT'O$ ſetzt; ſo iſt an der *Grenze*:

$$OT' - OT = d\sigma \cdot \cos\theta.$$

Dies iſt offenbar ein ſpecieller Fall von dem allgemeinen Satze in Nr. 84, und aus dem dort Geſagten erhellet: daß dieſe Eigenſchaft, welche bekanntlich *geraden* Linien zukommt, eine allgemeine Eigenſchaft *geodätiſcher* Linien iſt. — Bei den Anwendungen der

Infinitesimalmethode auf Curven, die auf gegebenen Fläche beschrieben sind, können folglich die geodätischen Linien, in allen den Fällen, wo nur ihre Länge in Betracht kommt, als gerade Linien behandelt werden. —

(4) Aus den allgemeinen Sätzen in Nr. 47 erhellet unmittelbar: daß eine geodätische Linie nicht nothwendig die kürzeste Linie zwischen irgend zwei ihrer Punkte ist; denn wir haben dort gesehen: daß die Curve, deren Differentialgleichung:

$$\beta = 0$$

ist, im Allgemeinen nicht die Eigenschaft besitzt, das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

zu einem Maximum, oder Minimum zu machen, wenn die Integrationsgrenzen so beschaffen sind, daß man eine zweite, der ersten unendlich nahe liegende Curve ziehen kann, welche derselben Differentialgleichung genügt und durch die Endpunkte A, B, oder durch irgend zwei zwischen A und B liegende Punkte geht. — Man hat hiernach folgende Regel, um zu bestimmen, in welchem Punkte die geodätische Linie aufhört eine kürzeste Linie zu sein:

„Es sei A (Fig. 2) der eine Endpunkt der geodätischen Linie, und man ziehe durch A eine zweite geodätische Linie, welche mit der ersten einen unendlich kleinen Winkel bildet; so schneiden sich beide im Allgemeinen in irgend einem andern Punkte C. Wird alsdann die Länge der geodätischen Linie von A aus gemessen, so hört sie im Allgemeinen auf die kürzeste Linie zu sein, wenn man über C hinausgeht." —

(5.) Endlich wollen wir noch die Gleichung der geodätischen Linie auf der Oberfläche eines Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

suchen, so werden die allgemeinen Gleichungen (a) auf S. 206:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{c^2x}{a^2z} \cdot \frac{d^2z}{ds^2},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{c^2y}{b^2z} \cdot \frac{d^2z}{ds^2}. \qquad \text{(c)}$$

Setzt man:

$$u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

$$v = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dz^2}{ds^2},$$

differenzirt dieſe letzte Gleichung, und ſubſtituirt für $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ ihre aus (c) genommenen Werthe; ſo findet man:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2c^2}{z}\left(\frac{x}{a^4} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{y}{b^4} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{z}{c^4} \cdot \frac{dz}{ds}\right)\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{c^2}{z} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Differenzirt man dagegen die Gleichung des Ellipſoides zweimal, und ſubſtituirt für $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ wieder dieſelben Werthe, wie vorhin; ſo findet man:

$$v = -\frac{c^2}{z} u \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Werden ferner dieſe beiden Gleichungen in einander dividirt, ſo erhält man:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{u}\frac{du}{ds},$$

alſo durch Integration:

$$uv = \text{const.}$$

Setzt man hierin für u und v ihre Werthe, ſo ergibt ſich als Gleichung einer geodätiſchen Linie:

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dz^2}{ds^2}\right) = \text{const.} \quad \text{(d)}$$

Iſt ferner p das aus dem Mittelpunkte des Ellipſoides auf die Berührungsebene deſſelben gefällte Perpendikel, und d der zu der Tangente der geodätiſchen Linie parallele Halbmeſſer; ſo wird wegen:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dz^2}{ds^2}$$

die Gleichung der geodätiſchen Linie:

$$pd = \text{const.} = m^2.$$

Wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer der geodätiſchen Linie bezeichnet, ſo iſt bekanntlich:

$$\varrho = \frac{d^2}{p}, \quad *)$$

oder für d ſeinen Werth $\frac{m^2}{p}$ geſetzt:

$$\varrho = \frac{m^4}{p^3}.$$

Längs derſelben geodätiſchen Linie ändert ſich alſo der Krümmungshalbmeſſer im umgekehrten Verhältniß des Kubus des aus dem Mittelpunkte des Ellipſoides auf ſeine Tangentialebene gefällten Perpendikels. —

Dieſe beiden Theoreme rühren von Joachimsthal her. —

---

*) Denn es iſt allgemein:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2,$$

oder wenn man für $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ ihre aus der Gleichung der geodätiſchen Linie gezogenen Werthe ſetzt:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \cdot \frac{c^4}{z^2}.$$

Wir haben aber geſehen, daß:

$$v = -\frac{c^2}{z}\, u\, \frac{d^2z}{ds^2}$$

iſt; folglich:

$$\frac{c^4}{z^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{v^2}{u^2} = \frac{p^4}{d^4},$$

und wenn man dies in den Ausdruck von ϱ ſubſtituirt; ſo iſt:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{p^2}{d^4}, \quad \varrho = \frac{d^2}{p}.$$

Aufgabe VI.

87. Zwiſchen zwei auf einer gegebenen Fläche liegenden Punkten, oder Curven eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu ziehen: daß das beſtimmte Integral:

$$\int(\mu ds + \mu' dx),$$

wo μ, μ' Functionen von x, y, z ſind, ein Maximum, oder Minimum wird. —

Aufl. Nehmen wir den Bogen s wieder zur independenten Veränderlichen, und bringen mithin das Integral auf die Form:

$$\int\left(\mu + \mu' \frac{dx}{ds}\right) ds;$$

ſo iſt leicht einzuſehen, daß die Lagrange'ſche Methode folgende Gleichungen gibt:

$$\lambda \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\lambda}{ds} - \lambda' \frac{du}{dx} - \frac{d\mu}{dx} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\mu'}{dx} + \frac{d\mu'}{ds} = 0,$$

$$\lambda \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\lambda}{ds} - \lambda' \frac{du}{dy} - \frac{d\mu}{dy} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\mu'}{dy} = 0, \qquad (A)$$

$$\lambda \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d\lambda}{ds} - \lambda' \frac{du}{dz} - \frac{d\mu}{dz} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\mu'}{dz} = 0.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen reſp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, addirt die Produkte und bemerkt, daß:

$$\frac{d\mu'}{ds} = \frac{d\mu'}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d\mu'}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d\mu'}{dz} \cdot \frac{dz}{ds}$$

iſt; ſo ergibt ſich wie in Aufg. V ſehr leicht:

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\mu}{ds} = 0.$$

Wenn alſo die Länge der Curve gegeben iſt, ſo iſt wieder: $\lambda = \mu + a$, und wenn ſie nicht gegeben iſt: $\lambda = \mu$. Betrachten wir den erſten dieſer beiden Fälle, und multipliciren, wie in Aufg. V,

die drei Gleichungen (A) reſp. mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addiren die Produkte; ſo ergibt ſich, wenn wieder $\mu + a$ ſtatt λ geſetzt wird:

$$(\mu + a)\left(\cos\alpha\frac{d^2x}{ds^2} + \cos\beta\frac{d^2y}{ds^2} + \cos\gamma\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

$$= \cos\alpha\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu}{dz}$$

$$-\cos\alpha\frac{d\mu'}{ds} + \frac{dx}{ds}\left(\cos\alpha\frac{d\mu'}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu'}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu'}{dz}\right).$$

Setzt man ferner für:

$$\cos\alpha\frac{d^2x}{ds^2} + \cos\beta\frac{d^2y}{ds^2} + \cos\gamma\frac{d^2z}{ds^2}$$

ſeinen Werth $\frac{\sin\omega}{-\varrho}$, und:

$$\frac{d\mu'}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{d\mu'}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{d\mu'}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$$

für $\frac{d\mu'}{ds}$; ſo wird dieſe Gleichung:

$$(\mu + a)\frac{\sin\omega}{-\varrho} = \cos\alpha\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu}{dz}$$

$$+\frac{d\mu'}{dy}\left(\cos\beta\frac{dx}{ds} - \cos\alpha\frac{dy}{ds}\right) + \frac{d\mu'}{dz}\left(\cos\gamma\frac{dx}{ds} - \cos\alpha\frac{dz}{ds}\right).$$

Da aber α, β, γ die Winkel ſind, welche das Perpendikel auf der Ebene des Normalſchnittes mit den Axen bildet, und $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Coſinus der Winkel, welche die Tangente der Curve mit denſelben Axen macht; ſo iſt bekanntlich, wenn α', β', γ' die Winkel ſind, welche das Perpendikel auf der Ebene dieſer beiden Geraden, d. h. die Normale der krummen Fläche, mit den Axen bildet:

$$\cos\alpha' = \cos\beta\frac{dz}{ds} - \cos\gamma\frac{dy}{ds},$$

$$\cos\beta' = \cos\gamma\frac{dx}{ds} - \cos\alpha\frac{dz}{ds},$$

$$\cos\gamma' = \cos\alpha\frac{dy}{ds} - \cos\beta\frac{dx}{ds}.$$

Die zuletzt gefundene Gleichung kann mithin wieder auf eine der drei folgenden Formen gebracht werden:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} =$$

$$\frac{1}{(\mu+a)^2}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}+\cos\gamma'\frac{d\mu'}{dy}-\cos\beta'\frac{d\mu'}{dz}\right)^2,$$

$$\frac{\sin\omega}{-\varrho} = \frac{1}{\mu+a}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}+\cos\gamma'\frac{d\mu'}{dy}-\cos\beta'\frac{d\mu'}{dz}\right),$$

$$\frac{\tan\omega}{-\varrho'} = \frac{1}{\mu+a}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}+\cos\gamma'\frac{d\mu'}{dy}-\cos\beta'\frac{d\mu'}{dz}\right).$$

Die Auflösung für den andern Fall, wo die Länge der Curve nicht gegeben ist, ergibt sich hieraus unmittelbar, wenn man $a=0$ setzt. — Wenn die Grenzpunkte der Curve gegeben sind, so ist klar, daß die von dem Zeichen $\int$ freien Glieder wieder verschwinden. — Wenn diese Grenzpunkte nicht gegeben sind, sondern blos auf Curven bleiben müssen, deren Gleichungen sind:

$$dy_0 = m_0 dx_0, \qquad dy_1 = m_1 dx_1,$$

$$dz_0 = n_0 dx_0, \qquad dz_1 = n_1 dx_1;$$

so ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie in Aufg. II:

$$(\mu_0 + a)\left(\frac{dx}{ds} + m_0\frac{dy}{ds} + n_0\frac{dz}{ds}\right)_0 + \mu'_0 = 0,$$

$$(\mu_1 + a)\left(\frac{dx}{ds} + m_1\frac{dy}{ds} + n_1\frac{dz}{ds}\right)_1 + \mu'_1 = 0,$$

oder wenn θ_0, θ_1 die Winkel bedeuten, unter welchen die Curve ihre Grenzcurven schneidet, und φ_0, φ_1 die Winkel, welche die Tangenten dieser letzten Curven in den Durchschnittspunkten mit der Axe der x machen:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} (\mu_0 + a)\cos\theta_0 + \mu'_0\cos\varphi_0 &= 0, \\ (\mu_1 + a)\cos\theta_1 + \mu'_1\cos\varphi_1 &= 0. \end{aligned}$$

Alle bisher erhaltenen Resultate werden auf den andern Fall, wo die

Länge der Curve nicht gegeben ist, anwendbar, wenn man $a=0$ setzt. —

Beispiel.

88. Wenn auf einer krummen Fläche zwei Punkte und irgend eine sie verbindende Curve gegeben sind, zwischen diesen Punkten eine Curve von gegebener Länge und solcher Beschaffenheit zu beschreiben, daß sie mit der gegebenen Curve die möglich größte Fläche einschließt. *) —

Da der Inhalt einer beliebigen Oberfläche durch:

$$\iint \sqrt{(1+p^2+q^2)}\, dxdy$$

ausgedrückt wird, so ist klar, daß, wenn die Gleichung der Oberfläche gegeben ist, dieser Ausdruck stets auf die Form $\int \mu' dx$ gebracht werden kann, wo:

$$\mu' = \int \sqrt{(1+p^2+q^2)}\, dy$$

eine gegebene Function von x und y ist. — Die Auflösung der vorliegenden Aufgabe ergibt sich also aus den allgemeinen Gleichungen (B), wenn man setzt:

$$\mu = 0,\quad \mu' = \int \sqrt{(1+p^2+q^2)}\, dy,$$

$$\frac{d\mu'}{dy} = \sqrt{(1+p^2+q^2)} = \sec\gamma',\quad \frac{d\mu'}{dx} = 0.$$

Diese Gleichungen werden demnach:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{a^2},$$

$$\varrho = a\sin\omega, \qquad (a)$$

$$\varrho' = a\tan\omega.$$

Wenn also die Richtung der Tangente für irgend einen Punkt bekannt ist, so kann die Oskulationsebene und der Krümmungshalbmesser durch folgende Construction gefunden werden: Es sei P (Fig. 12)

---

*) Diese Curve ist, so viel wir wissen, zuerst von Delaunay bestimmt. — Liouville, Journal de Math., tom. VIII, p. 241.

der Punkt der Curve, und die Ebene des Papieres die Normalebene derſelben, C' der Krümmungsmittelpunkt des Normalſchnittes der krummen Fläche, $C'A$ ſenkrecht auf PC' und $= a$, und $C'C$, PC reſp. parallel und ſenkrecht zu PA; ſo iſt C der Krümmungsmittelpunkt der geſuchten Curve und eine durch PC ſenkrecht auf die Ebene des Papieres geführte Ebene die Oskulationsebene. — Die Richtigkeit dieſer Conſtruction erhellet aus den Gleichungen (a). *) —

Wenn verlangt wird, die Curve zwiſchen zwei gegebenen Curven ſo zu ziehen, daß die Fläche zwiſchen ihr und einer durch ihre Endpunkte gehenden Curve einer gegebenen Species ein Maximum iſt; ſo ergibt ſich durch ganz ähnliche Schlüſſe, wie die auf S. 173, daß die Gleichung der geſuchten Curve noch dieſelbe iſt, als vorhin. — Was die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder anlangt, ſo iſt die Behandlungsweiſe derſelben ebenfalls der dort angewandten ganz analog. — Denn die zwiſchen beiden Curven liegende Fläche wird offenbar ausgedrückt durch:

$$\int_{x_0}^{x_1} \mu' dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, x_0, x_1)\, dx,$$

wo μ' dieſelbe Bedeutung hat, wie im erſten Falle, und $F(x, x_0, x_1)$ eine gegebene Function iſt, nämlich der Werth des Integrales $\int \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}\, dy$ für die gegebene Curve, welche durch die Endpunkte der geſuchten Curve geht. — Verfährt man alſo genau, wie in dem Falle einer ebenen Curve, ſo erhält man die Gleichungen:

---

*) Wenn die gegebene krumme Fläche ein Ellipſoid iſt, ſo kann die Richtung der Oskulationsebene aus der der Tangente durch folgende Conſtruction gefunden werden: Es ſei C (Fig. 13) der Mittelpunkt des Ellipſoides, CP ſenkrecht auf der Berührungsebene, CD der zu der Tangente der Curve parallele Halbmeſſer, und PO ſenkrecht auf der Ebene PCD und $= \frac{CD^2}{a}$; ſo iſt die Ebene DCO parallel zu der Oskulationsebene; denn es iſt:

$$\tan PCO = \frac{OP}{CP} = \frac{d^2}{ap} = \frac{\varrho'}{a} = \tan \omega.$$

$$a\cos\omega_0 + \cos\theta_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_0}\,dx = 0,$$

$$a\cos\omega_1 - \cos\theta_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx_1}\,dx = 0.$$

Aufgabe VII.

89. Zwiſchen zwei gegebenen Punkten einer krummen Fläche ie Curve von conſtanter Krümmung und der kleinſten Länge beſchreiben. —

Aufl. Wenden wir wieder die Lagrange'ſche Methode an und hmen den Curvenbogen s zu der independenten Veränderlichen, iſt:

$$V = 1,$$

ɔem die abhängigen Veränderlichen x, y, z durch die Gleichungen:

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

b:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

ɛknüpft ſind. — Da alſo in V keine der Veränderlichen vorkommt, iſt einleuchtend, daß die Gleichungen, welche die Coefficienten von , δy, δz liefern, folgende ſind:

$$\frac{d^2 . \lambda' \frac{d^2x}{ds^2}}{ds^2} - \frac{d . \lambda \frac{dx}{ds}}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 . \lambda' \frac{d^2y}{ds^2}}{ds^2} - \frac{d . \lambda \frac{dy}{ds}}{ds} = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{d^2 . \lambda' \frac{d^2z}{ds}}{ds^2} - \frac{d . \lambda \frac{dz}{ds}}{ds} = 0.$$

ɛſe Gleichungen ſind unmittelbar integrabel, und geben:

$$\frac{d.\lambda'\frac{d^2x}{ds^2}}{ds}-\lambda\frac{dx}{ds}=a,$$

$$\frac{d.\lambda'\frac{d^2y}{ds^2}}{ds}-\lambda\frac{dy}{ds}=b,$$

$$\frac{d.\lambda'\frac{d^2z}{ds^2}}{ds}-\lambda\frac{dz}{ds}=c,$$

oder:

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d\lambda'}{ds}+\lambda'\frac{d^3x}{ds^3}-\lambda\frac{dx}{ds}=a,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{d\lambda'}{ds}+\lambda'\frac{d^3y}{ds^3}-\lambda\frac{dy}{ds}=b, \qquad (B)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{d\lambda'}{ds}+\lambda'\frac{d^3z}{ds^3}-\lambda\frac{dz}{ds}=c.$$

Eliminirt man λ zwiſchen den beiden erſten dieſer letzten Gleichungen, ſo erhält man:

$$\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{d\lambda'}{ds}+\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^3x}{ds^3}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^3y}{ds^3}\right)\lambda'=a\frac{dy}{ds}-b\frac{dx}{ds},$$

welche Gleichung ebenfalls integrabel iſt, und gibt:

$$\lambda'\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)=ay-bx+f.$$

Ebenſo ergibt ſich durch Elimination von λ zwiſchen der erſten und dritten, ſo wie zwiſchen der zweiten und dritten derſelben Gleichungen:

$$\lambda'\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)=cx-az+f', \qquad (C)$$

$$\lambda'\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)=bz-cy+f''.$$

Wenngleich ſich die Gleichungen (C) nicht allgemein integriren

laſſen, ſo läßt ſich daraus doch die folgende merkwürdige Eigenſchaft der geſuchten Curve ableiten:

Wenn:

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \qquad (1)$$

$$\frac{f''}{\sqrt{(f^2+f'^2+f''^2)}},\quad \frac{f'}{\sqrt{(f^2+f'^2+f''^2)}},\quad \frac{f}{\sqrt{(f^2+f'^2+f''^2)}} \qquad (2)$$

die Coſinus der Winkel ſind, welche zwei Ebenen mit den Coordinatenebenen machen, O (Fig. 19) der Anfangspunkt, PP' irgend ein Bogen der Curve iſt und pp', $\pi\pi'$ die Projectionen deſſelben auf die Ebenen (1) und (2) ſind; ſo iſt der Sector Opp' der Differenz $P\pi - P'\pi'$ der Perpendikel $P\pi$, $P'\pi'$ proportional. —

Die Wahrheit dieſes Satzes ergibt ſofort aus der Gleichung (G) auf S. 222, welche wie folgt geſchrieben werden kann:

$$c(ydx - xdy) + b(xdz - zdx) + a(zdy - ydz) = f''dx + f'dy + fdz.$$

Denn bedeutet dA das Element von Opp', ſo iſt offenbar:

$$dA = \left\{\frac{c(ydx - xdy) + b(xdz - zdx) + a(zdy - ydz)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}\right\}$$

und:

$$d.P\pi = \frac{f''dx + f'dy + fdz}{\sqrt{(f^2 + f'^2 + f''^2)}}.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung (G), ſo erhält man:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\,dA = \sqrt{(f^2+f'^2+f''^2)}\,d.P\pi.$$

Integrirt man, und ſetzt:

$$\sqrt{(f^2 + f'^2 + f''^2)} = k\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)};$$

ſo erhält man endlich:

$$A = Opp' = k(P\pi - P'\pi'),$$

w. b. w. ſ.

Wenn die Ebenen (1), (2) auf einander ſenkrecht ſind, ſo iſt die Projection der Curve auf die Ebene (1) offenbar eine gerade Linie, und mithin dieſe Curve eben, was mit ſpäter Geſagtem übereinſtimmt (S. 221).

Die gesuchte Curve kann auch durch zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung ausgedrückt werden. — Denn wenn man Ebene (1) zur Ebene der yz nimmt, so kann die Gleichung (G) S. 222 offenbar auf die Form:

$$ydz - zdy = ldx + mdy + ndz,$$

oder:

$$(y - n)dz - (z + m)dy = ldx$$

gebracht werden; oder wenn man die Coordinaten y, z verändert, s wieder zur independenten Veränderlichen nimmt:

$$y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} = l\frac{dx}{ds}.$$

Hieraus folgt durch Differenziren:

$$y\frac{d^2z}{ds^2} - z\frac{d^2y}{ds^2} = l\frac{d^2x}{ds^2},$$

und außerdem hat man die identische Gleichung:

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Eliminirt man mittelst dieser Gleichungen die Größen:

$$\frac{d^2y}{ds^2},\quad \frac{d^2z}{ds^2}$$

aus der Gleichung:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

und reducirt; so bekommt man:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{m}\frac{y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds}}{\sqrt{(l^2 + y^2 + z^2)}}.$$

Integrirt man diese Gleichung und fügt eine arbiträre Constante hinzu, so hat man:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{m}\{C + \sqrt{(l^2 + y^2 + z^2)}\},$$

so daß die gesuchte Curve durch das System der beiden Gleichungen (a) und (b) ausgedrückt wird. —

Ehe wir weiter gehen, wollen wir die bei den Integrationen eingeführten Constanten bestimmen. — Zu dem Zwecke wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen der gegebenen Punkte verlegen, so daß man hat:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

und da beide Punkte fest liegen; so ist:

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0, \quad \delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta z_1 = 0.$$

Die außerhalb des Integralzeichens stehenden Glieder geben alsdann offenbar die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right)_1 = 0, \\ \lambda'_0 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d\delta y}{ds} - \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right)_0 = 0, \end{aligned} \tag{D}$$

welchen genügt wird, wenn man entweder setzt:

$$\lambda'_1 = 0, \quad \lambda'_0 = 0,$$

oder:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right)_1 = 0$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right)_0 = 0.$$

Die Bedingungen:

$$\lambda'_0 = 0, \quad \lambda'_1 = 0$$

geben offenbar nach den Gleichungen (C):

$$f = 0, \quad f' = 0, \quad f'' = 0$$

und:

$$\frac{a}{x_1} = \frac{b}{y_1} = \frac{c}{z_1}.$$

Was die andern Factoren:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{d\delta y}{ds}+\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{d\delta z}{ds}\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\&c.\ldots\ldots\ldots\ldots\right)_1$$

anlangt, ſo ſieht man leicht ein, daß es nicht möglich iſt, ſie verſchwinden zu machen, wenn zwei der Variationen:

$$\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0,\ \&c.$$

independent bleiben ſollen. — Denn da dieſe Variationen blos durch die Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{ds}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\delta z}{ds}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{ds}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{ds}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\delta z}{ds}\right)_1=0$$

verknüpft ſind, ſo müßte man, um dieſe Factoren verſchwinden zu machen, ohne ihre Allgemeinheit zu beeinträchtigen, offenbar haben:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0=\nu_0\left(\frac{dx}{ds}\right)_0,\quad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_1=\nu_1\left(\frac{dx}{ds}\right)_1,$$

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0=\nu_0\left(\frac{dy}{ds}\right)_0,\quad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_1=\nu_1\left(\frac{dy}{ds}\right)_1, \qquad (k)$$

$$\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0=\nu_2\left(\frac{dz}{ds}\right)_0,\quad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_1=\nu_1\left(\frac{dz}{ds}\right)_1.$$

Erhebt man die drei erſten unter einanderſtehenden dieſer letzten Gleichungen zum Quadrat und addirt, ſo erhält man:

$$\frac{1}{m^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0^2=\nu_0^2.$$

Multiplicirt man dagegen dieſelben Gleichungen reſp. mit:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{dy}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{dz}{ds}\right)_0,$$

und addirt die Produkte; ſo findet man:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0+\left(\frac{dy}{ds}\right)_0\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0+\left(\frac{dz}{ds}\right)_0\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0=\nu_0.$$

Die linke Seite dieſer letzten Gleichung iſt aber offenbar identiſch $=0$, ſo daß man die Gleichung hätte:

$$\frac{1}{m}=\nu_0=0,$$

welche unmöglich iſt, weil m eine gegebene Größe iſt. — Daſſelbe gilt offenbar auch von dem zweiten Syſteme der Gleichungen (k); es muß alſo ſein:

$$\lambda'_1=0,\quad \lambda'_0=0,$$

und folglich:

$$f=0,\quad f'=0,\quad f''=0.$$

Setzt man alſo $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ und multiplicirt die Gleichungen (C) reſp. mit:

$$\frac{dz}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dx}{ds},$$

ſo erhält man:

$$(ay-bx)\,dz+(cx-az)\,dy+(bz-cy)\,dx=0,$$

oder:

$$a(ydz-zdy)+b(zdx-xdz)+c(xdy-ydx)=0.$$

Dieſe Gleichung iſt leicht zu integriren, wenn man ſetzt:

$$y=ux,\quad z=vx,$$

und gibt:

$$ay-bx=m\,(az-cx); \qquad \text{(E)}$$

d. h. die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene. Die geſuchte Curve iſt alſo in dieſem Falle eine ebene Curve, und da ihr Krümmungshalbmeſſer conſtant iſt — offenbar ein Kreis. — Die Curve von conſtanter Krümmung, deren Länge zwiſchen zwei gegebenen Punkten ein Minimum iſt, iſt demnach ein Kreis, wenn die Lage jeder Grenztangente unbeſtimmt iſt. — Andererſeits iſt aber auch klar, daß der Kreis nicht die allgemeine Auflöſung in dem Falle ſein kann, wo die Lage der Grenztangenten gegeben iſt; denn dieſe Lage kann ſo beſchaffen ſein, daß es nicht möglich iſt,

einen Kreis zu beſchreiben, welcher den geforderten Bedingungen genügt — z. B. wenn die gegebenen Tangenten nicht in derſelben Ebene liegen. —

Wenn die Lage der Tangenten an den Grenzpunkten ſo gegeben iſt, daß die Gleichung:

$$cf + bf' + af'' = 0 \qquad (F)$$

ſtattfindet; ſo iſt die geſuchte Curve noch eine ebene. — Denn multiplicirt man die Gleichungen (C) reſp. mit:

$$\frac{dz}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dx}{ds}$$

und addirt die Produkte; ſo erhält man:

$$(ay - bx + f)\,dz + (cx - az + f')\,dy + (bz - cy + f'')\,dx = 0, \qquad (G)$$

und wenn der Anfangspunkt in irgend einen Punkt der durch die Gleichungen:

$$ay - bx + f = 0, \quad cx - az + f' = 0$$

ausgedrückten Geraden verlegt wird; ſo iſt leicht einzuſehen, daß wegen der Relation:

$$cf + bf' + af'' = 0,$$

$f = f' = f'' = 0$ iſt, und mithin die Gleichung (G) wieder auf die frühere Form:

$$(ay - bx)\,dz + (cx - az)\,dy + (bz - cy)\,dx = 0$$

reducirt wird. — In dieſem Falle iſt alſo die geſuchte Curve noch ein Kreis. —

Wenn die Grenzpunkte nicht gegeben ſind, ſondern nur auf zwei gegebenen Flächen:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0$$

bleiben müſſen; ſo ſind die Glieder mit:

$$\delta x_0, \ \delta y_0, \ \delta z_0, \ \delta x_1, \ \delta y_1, \ \delta z_1$$

offenbar:

$$\left(\frac{d.\lambda'\frac{d^2x}{ds^2}}{ds}-\lambda\frac{dx}{ds}\right)_0\delta x_0+\left(\frac{d.\lambda'\frac{d^2y}{ds^2}}{ds}-\lambda\frac{dy}{ds}\right)_0\delta y_0+\left(\frac{d.\lambda'\frac{d^2z}{ds^2}}{ds}-\lambda\frac{dz}{ds}\right)_0\delta z_0,$$

$$\left(\frac{d.\lambda'\frac{d^2x}{ds^2}}{ds}-\text{\&c.}\right)_1\delta x_1+\text{\&c.},$$

welche ſich wegen der Gleichungen (B) auf:

$$a\delta x_0+b\delta y_0+c\delta z_0,$$

$$a\delta x_1+b\delta y_1+c\delta z_1$$

reduciren, und da die Variationen:

$$\delta x_0,\ \text{\&c.},\ \delta x_1,\ \text{\&c.}$$

durch die Gleichungen:

$$\frac{du_0}{dx_0}\delta x_0+\frac{du_0}{dy_0}\delta y_0+\frac{du_0}{dz_0}\delta z_0=0,$$

$$\frac{du_1}{dx_1}\delta x_1+\frac{du_1}{dy_1}\delta y_1+\frac{du_1}{dz_1}\delta z_1=0$$

verknüpft ſind; ſo geben die Glieder mit dieſen Variationen die Gleichungen:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{du_0}{dx_0}=\frac{1}{b}\cdot\frac{du_0}{dy_0}=\frac{1}{c}\cdot\frac{du_0}{dz_0},$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{du_1}{dx_1}=\frac{1}{b}\cdot\frac{du_1}{dy_1}=\frac{1}{c}\cdot\frac{du_1}{dz_1}.$$

Da aber die Gleichungen:

$$\lambda'_0=0,\quad\lambda'_1=0,$$

im Allgemeinen geben:

$$ay_0-bx_0+f=0,\quad cx_0-az_0+f'=0,\quad bz_0-cy_0+f''=0,$$

$$ay_1-bx_1+f=0,\quad cx_1-az_1+f'=0,\quad bz_1-cy_1+f''=0,$$

ſo erhält man durch Subtraction:

$$\frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b} = \frac{z_1 - z_0}{c},$$

woraus in Verbindung mit den obigen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \frac{du_0}{dx_0} &= \frac{1}{y_1 - y_0} \cdot \frac{du_0}{dy_0} = \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \frac{du_0}{dz_0}, \\ \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \frac{du_1}{dx_1} &= \frac{1}{y_1 - y_0} \cdot \frac{du_1}{dy_1} = \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \frac{du_1}{dz_1}. \end{aligned} \tag{H}$$

Hieraus sieht man: daß die Verbindungslinie der Grenzpunkte auf den Grenzflächen senkrecht, und ihre Länge mithin ein Minimum ist. —

Wenn die Minimumscurve ihre Grenzflächen berühren muß, so sind die obigen Schlüsse nicht mehr anwendbar, und die gesuchte Curve ist im Allgemeinen kein Kreis mehr; man kann aber aus den außerhalb des Integralzeichens stehenden Gliedern ein interessantes geometrisches Theorem in Bezug auf die Lage der Oskulationsebenen an den Grenzpunkten ableiten. — Denn nehmen wir der Einfachheit wegen die Grenzpunkte als gegeben an, so lautet die Aufgabe: „Zwischen zwei Punkten, wovon jeder auf einer besonderen Fläche liegt, eine Curve von constanter Krümmung zu ziehen, welche diese Flächen in ihren Endpunkten berührt, und deren Länge ein Minimum ist." —

Da die Grenzpunkte fest liegen, so ist wieder:

$$\delta x_0 = 0,\ \delta y_0 = 0,\ \delta z_0 = 0,\ \delta x_1 = 0,\ \delta y_1 = 0,\ \delta z_1 = 0,$$

und die außerhalb des Zeichens $\int$ stehenden Glieder geben wieder die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda'_0 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right)_0 &= 0, \\ \lambda'_1 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right)_1 &= 0. \end{aligned} \tag{D}$$

Da aber die Tangenten der Curve in ihren Endpunkten nach der Voraussetzung in den Berührungsebenen der Grenzflächen liegen, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{du_0}{dx_0}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+\frac{du_0}{dy_0}\left(\frac{dy}{ds}\right)_0+\frac{du_0}{dz_0}\left(\frac{dz}{ds}\right)_0=0,$$

$$\frac{du_1}{dx_1}\left(\frac{dx}{ds}\right)_1+\frac{du_1}{dy_1}\left(\frac{dy}{ds}\right)_1+\frac{du_1}{dz_1}\left(\frac{dz}{ds}\right)_1=0,$$

woraus leicht erhellet, daß die Variationen:

$$\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{d\delta z}{ds}\right)_0$$

durch die Gleichungen:

$$\frac{du_0}{dx_0}\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0+\frac{du_0}{dy_0}\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0+\frac{du_0}{dz_0}\left(\frac{d\delta z}{ds}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0+\left(\frac{dy}{ds}\right)_0\left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0+\left(\frac{dz}{ds}\right)_0\left(\frac{d\delta z}{ds}\right)_0=0$$

verknüpft sind. — Wenn man mittelst dieser Gleichungen zwei der Variationen:

$$\left(\frac{d\delta x}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{d\delta y}{ds}\right)_0,\ \left(\frac{d\delta z}{ds}\right)_0$$

aus der ersten der Gleichungen (D) eliminirt, so erhält man:

$$\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0\frac{du_0}{dz_0}+\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0\frac{du_0}{dy_0}$$

$$+\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0\frac{du_0}{dx_0}=0,$$

und eine ähnliche Gleichung findet offenbar auch für den andern Endpunkt der gesuchten Curve statt. — Hieraus schließen wir: daß, wenn die Curve den Bedingungen der Aufgabe gemäß beschrieben ist, die Oskulationsebene an jedem Ende derselben auf den Grenzflächen normal ist. *) —

*) Den Gleichungen (D) wird auch durch $\lambda'_0=0$, $\lambda'_1=0$ genügt; allein bei dieser Annahme wird die gesuchte Curve, wie wir gesehen haben, ein Kreis, und man kommt folglich auf ein unmögliches Resultat. — In der That hätte man in dieser Voraussetzung mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht, und zwei gegebene Ebenen berührt! —

Zum Schluß wollen wir noch bemerken: daß die für den Fall, wo die Lage der Grenztangenten unbeſtimmt iſt, gefundene Auflöſung beim erſten Anblick eine Ausnahme von der allgemeinen Theorie (S. 140) zu bilden ſcheint; denn nach dieſer Theorie könnte man annehmen, daß die Auflöſung unbeſtimmte Conſtanten enthalten muß, weil die Gleichungen, welche durch die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder geliefert werden, durch:

$$\lambda'_0 = 0, \quad \lambda'_1 = 0$$

erfüllt werden. — Dieſe Ausnahme iſt jedoch nur ſcheinbar, und hat ihren Grund darin: daß vermöge der beſondern Art, wie λ' in den Gleichungen (C) vorkommt, jede der Gleichungen:

$$\lambda'_0 = 0, \quad \lambda'_1 = 0$$

in der That die Stelle von drei Gleichungen vertritt, was am deutlichſten erhellet, wenn man die Gleichungen (C) zum Quadrat erhebt und addirt. — Denn auf dieſe Weiſe erhält man, wie leicht zu ſehen:

$$\lambda'^2 = m^2 \{(ay - bx + f)^2 + (cx - az + f')^2 + (bz - cy + f'')^2\}.$$

Wenn alſo λ' für irgend ein Werthesyſtem von x, y, z verſchwindet; ſo muß dieſes Syſtem offenbar den drei Gleichungen:

$$ay - bx + f = 0, \quad cx - az + f' = 0, \quad bz - cy + f'' = 0$$

genügen. —

Fünftes Kapitel.

Ueber vielfache bestimmte Integrale im Allgemeinen.

90. Die Schwierigkeiten, welche sich bei Anwendung der Variationsrechnung auf Probleme darbieten, wobei *vielfache* bestimmte Integrale vorkommen, entspringen hauptsächlich daraus: daß die *Grenzen*, welche bei vielfachen Integralen angewandt werden müssen, in der Regel von ganz anderer Beschaffenheit sind, als die bei *einfachen* Integralen. — Bei allen bisher betrachteten Integralen war die besondere Beschaffenheit der Grenzen auf den Proceß der Integration selbst von keinem Einfluß, weil die Integration als schon vollzogen gedacht wurde, ehe die *Grenzen* in Betracht kamen. — So haben wir z. B. gesehen: daß bei der Bestimmung der Variation eines *einfachen* Integrales die von der Variation der *Grenzen* herrührenden Glieder von dem Integralzeichen ganz *frei* sind — und deshalb wie gewöhnliche algebraische Größen behandelt werden können. — Bei *vielfachen* Integralen verhält sich die Sache jedoch anders, indem hier jede der successiven Integrationen als in sich völlig bestimmt vorausgesetzt wird, d. h. es wird dabei vorausgesetzt: daß nach jeder Integration, ehe zu der folgenden geschritten wird, die Veränderliche, nach welcher integrirt wurde, zwischen gewissen bestimmten Grenzen genommen wird, welche im Allgemeinen *Functionen* der übrigen Veränderlichen sind. — Offenbar ist die Beschaffenheit der bei jeder Integration angewandten Grenzen auf die folgende Integration von Einfluß, weil die Form der Function unter dem folgenden Integralzeichen davon abhängt. — Es ist deshalb zu erwarten, und auch wirklich der Fall: daß bei der Variation eines *vielfachen* Integrales die von der Variation der *Grenzen* herrührenden Glieder *nicht* von dem Zeichen $\int$ frei sind, wodurch besondere Schwierigkeiten bei der Lösung der Aufgabe entstehen. —

91. Da eine klare Einsicht in das Wesen und die Bedeutung eines vielfachen Integrales für die Zwecke der Variationsrechnung durchaus nothwendig ist, so wollen wir die durch ein solches Integral ausgedrückten verschiedenen Operationen näher erörtern — und zwar erstens in der allgemeinsten Bedeutung, und dann zweitens in dem mehr beschränkten Sinne, in welchem ein solches Integral in der Variationsrechnung vorkommt. —

Der Bestimmtheit und Klarheit wegen wollen wir das dreifache Integral:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} . \, V dx dy dz$$

betrachten, worin V eine Function von x, y, z ist. — Dasselbe drückt folgende Operationen aus: 1) die bestimmte Integration nach z, wobei die Grenzen gewisse Functionen von x und y sind; — 2) die bestimmte Integration nach y, indem die Grenzen gewisse Functionen von x sind, — und 3) die bestimmte Integration nach x, wo die Grenzen gewisse Constanten sind. — Wenn diese Functionen und Constanten unabhängig von einander sind, so wird das Integral in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen; allein in diesem allgemeinsten Sinne haben wir hier ein solches Integral nicht zu untersuchen, weil bei allen Aufgaben, worauf die Variationsrechnung in ihrem gegenwärtigen Zustande angewandt wird, solche Integrale nicht vorkommen. —

92. Wir werden daher das vielfache Integral hier in dem mehr beschränkten Sinne betrachten, in welchem es bei den Aufgaben der Variationsrechnung, und überhaupt bei den meisten Aufgaben vorkommt — nämlich wo die Grenzen als so bestimmt vorausgesetzt werden: daß das Endresultat die Grenze der Summe der Elemente $V dx dy dz$ für alle Werthesysteme von x, y, z ausdrückt, für welche eine gegebene Function $\varphi(x, y, z)$ das Zeichen nicht ändert, d. h. für welche:

$$\varphi(x, y, z) > 0 \text{ oder } < 0$$

ist.*) — Wir haben also zunächst zu sehen, wie dies thunlich ist.

*) Der Fall zweier Grenzfunctionen ist leicht auf den obigen zurückzuführen, wie man später sehen wird. —

Bekanntlich drückt ein bestimmtes Integral wie:

$$\int_{z_0}^{z_1} V dz$$

die Grenze der Summe der Elemente Vdz für alle zwischen z_0 und z_1 liegende Werthe von z aus. — Wenn also das Integral diese Summe für alle Werthe von z ausdrücken soll, welche mit einer gewissen Voraussetzung verträglich sind; so ist klar, daß man als Integrationsgrenzen die äußersten Werthe von z nehmen muß, welche mit dieser Voraussetzung bestehen können. — Da nun Functionen überhaupt ihr Zeichen nur ändern, wenn sie durch Null, oder durch das Unendliche gehen; so leuchtet ein, daß man diese äußersten Werthe von z, welche die Grenzen der Integration nach z sind, findet, wenn man $\varphi(x, y, z) = 0$, oder $\varphi(x, y, z) = \infty$ setzt. — Diese letzte Annahme übergehen wir, weil sie selten in der Praxis vorkommt — und es seien z_0, z_1 die Werthe von z, welche die Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

als die Integrationsgrenzen für z gibt, und im Allgemeinen Functionen von x und y sind.*) Es sei:

---

*) Wenn die für z aufgelöste Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ mehr als zwei Werthe:

$$z', z'', \ldots . z^{(n)}$$

gibt, und φ bei jedem derselben das Zeichen ändert; so hat man, wenn n gerade ist, offenbar:

$$\int_{z_0}^{z_1} V dz = \int_{z'}^{z''} V dz + \int_{z''}^{z'''} V dz + \&c. + \int_{z^{(n-1)}}^{z^{(n)}} V dz,$$

wo alsdann jedes dieser Integrale wie:

$$\int_{z_0}^{z_1} V dz$$

im Texte zu behandeln ist. —

Wenn n ungerade ist, so ist das letzte Integral der vorhergehenden Reihe:

$$\int_{z^{(n)}}^{\infty} V dz.$$

Ferner ist einleuchtend, daß jeder Werth von z, welcher der Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

genügt; aber bei welchem $\varphi(x, y, z)$ das Zeichen nicht ändert, unberücksichtigt bleiben muß. —

$$V_1 = \int_{z_0}^{z_1} V dz,$$

und wir wollen die mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werthe jeder Veränderlichen *mögliche Werthe* nennen. — Da x, y bei der Integration nach z als *constant* angesehen werden, so bedeutet V_1 offenbar die Grenze der Summe der Elemente $V dz$ für alle die *möglichen* Werthe von z bei bestimmten Werthen von x und y. Wird diese Größe nun mit dy multiplicirt und zwischen den äußersten Werthen von y integrirt; so ist das Resultat:

$$\int_{y_0}^{y_1} V_1 dy$$

aus demselben Grunde die Grenze der Summe der Elemente $V_1 dy$ für alle die *möglichen* Werthe von y, welche einem gegebenen Werthe von x entsprechen — und folglich die Grenze der Summe der Elemente $V dy dz$ für alle die möglichen Wertheſyſteme von y, z bei einem gegebenen Werthe von x.

Die *äußerſten*, d. h. die *größten* und *kleinſten* Werthe von y bei einem gegebenen Werthe von x werden offenbar gefunden, wenn man die Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

in der Vorausſetzung eines conſtanten x differenziirt, und $dy = 0$ ſetzt. — So ergibt ſich:

$$\frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0,$$

oder weil $dy = 0$ iſt:

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Die Grenzen für y ergeben ſich alſo durch Elimination von z zwiſchen den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Das Reſultat dieſer Elimination ſei:

$$\varphi_1(x, y) = 0,$$

so ergibt sich durch ganz ähnliche Schlüsse, daß die Grenzwerthe von x durch Elimination von y zwischen den Gleichungen:

$$\varphi_1 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dy} = 0$$

gefunden werden. — Da aber $\varphi_1(x, y) = 0$ das Resultat der Elimination von z zwischen $\varphi(x, y, z) = 0$ und einer andern Gleichung ist, so hat man:

$$\frac{d\varphi_1}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0,$$

oder wegen:

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0, \text{ auch } \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Die Grenzwerthe von x ergeben sich demnach durch Elimination von y und z zwischen den drei Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Man hat also folgende Regel:

1. Bei der ersten Integration nach z ergeben sich die Grenzwerthe von z aus der Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

2. Bei der darauf folgenden Integration nach y erhält man die Grenzwerthe von y aus den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

durch Elimination von z. —

3. Bei der letzten Integration nach x erhält man endlich die Grenzwerthe von x durch Elimination von y und z zwischen den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

93. Beispiel 1. Man soll den Werth des auf alle Werthesysteme von x, y, z, welche die Function:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

negativ machen, erſtreckten Integrales:

$$u = \iiint dx dy dz$$

finden.

1. Integrirt man zuerſt nach z zwiſchen den Grenzen:

$$z = \pm c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)},$$

ſo findet man:

$$u = 2c\iint\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx dy.$$

2. Integrirt man hierauf nach y, indem man ſetzt:

$$y = b \sin\theta \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)};$$

ſo ergibt ſich das unbeſtimmte Integral:

$$\int\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dy =$$

$$\frac{1}{2}\left\{b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\text{arc.sin.}\frac{y}{b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} + y\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right\}.$$

Die Grenzwerthe von y ergeben ſich nach dem Obigen durch Elimination von z zwiſchen den Gleichungen $\varphi(x, y, z) = 0, \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = 0$, d. h. zwiſchen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{z}{c} = 0,$$

und ſind mithin:

$$y = \pm b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)};$$

folglich iſt:

$$u = \pi bc\int\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

3. Dieſer letzte Ausdruck iſt endlich noch nach x zu integriren, indem ſich die Grenzen von x durch Elimination von y und z aus den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} = 0$$

ergeben, wodurch man erhält $x = \pm a$; folglich:

$$u = \frac{4\pi}{3} . abc.$$

Beiſpiel 2. Man ſoll den Werth des Integrales:

$$u = \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

finden, wenn $\varphi(x, y, z)$ dieſelbe Form wie vorhin hat.

Hier iſt wieder:

$$u = 2c \iint (x^2 + y^2) \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy,$$

und wenn man wieder ſetzt:

$$y = b \sin\theta \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)};$$

ſo erhält man:

$$(x^2 + y^2) \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} by =$$

$$\left\{ x^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2\theta \right\} b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cos^2\theta d\theta,$$

und da die Grenzwerthe von θ offenbar $\pm \frac{\pi}{2}$ ſind:

$$\int (x^2 + y^2) \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dy =$$

$$b x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) . \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 . \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta.$$

alſo endlich:

$$u=\pi dc.\int_{-a}^{+a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\tfrac{1}{2}\pi b^5c.\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2dx=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2).$$

94. Wir haben im Vorhergehenden das dreifache Integral aus einem rein analyſiſchen Geſichtspunkte betrachtet, theils um das Geſagte leicht auf beliebig vielfache Integrale ausdehnen zu können; und theils um die Meinung zu beſeitigen, daß geometriſche Betrachtungen hierbei durchaus nothwendig ſeien. — Gleichwohl ſind ſolche geometriſche Betrachtungen ſehr dazu geeignet, dem Anfänger die Unterſuchung zwei- und dreifacher beſtimmter Integrale zu erleichtern. Wenn z. B. $\varphi(x, y, z)=0$ die Gleichung einer Oberfläche iſt, welche einen endlichen Körper umſchließt; ſo drückt V_1 die Grenze der Summe der Elemente Vdz für alle Punkte des Körpers aus, welche zwiſchen vier Ebenen liegen, wovon zwei in den Abſtänden y und $y+dy$ zu der Ebene der xz und zwei in den Abſtänden x und $x+dx$ zu der Ebene der yz parallel ſind. — Ferner drückt V_2 die Grenze der Summe der Elemente $Vdxdy$ für alle Punkte des Körpers aus, welche zwiſchen den in den Entfernungen x und $x+dx$ zu der Ebene der yz parallelen Ebenen liegen; und endlich drückt V_3 oder $\iiint Vdxdydz$ die Grenze der Summe der Elemente $Vdxdydz$ für alle Punkte des Körpers aus. — So drückt z. B. das Integral:

$$\int_{z_0}^{z_1}dxdydz$$

den Inhalt eines Prismas aus, welches parallel zu der Axe der z eine endliche Länge hat, und deſſen beide andern Dimenſionen unendlich klein ſind. Das Integral:

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}dxdydz$$

dagegen drückt ein Körperſtück aus, wovon zwei Dimenſionen endlich und die dritte unendlich klein iſt — und endlich drückt das Integral:

$$\int_{0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}dxdydz$$

den Inhalt des ganzen Körpers aus. —

Endlich ist einleuchtend: daß bei der Ermittelung des Werthes vielfacher bestimmter Integrale die Reihenfolge der einzelnen Integrationen gleichgültig ist; denn das Endresultat ist stets dasselbe, nämlich die Grenze der Summe der Elemente $Vdxdydz$ für alle Werthe von x, y, z, welche mit der Bedingung $\varphi(x, y, z) \gtrless 0$ verträglich sind. — Dies findet nicht bei allen bestimmten Integralen statt, ist aber nothwendig, wenn die Regeln der Variationsrechnung darauf anwendbar sein sollen. —

Ueber die Vertauschung der independenten Veränderlichen in vielfachen Integralen überhaupt.

95. (1). Wenn in einem doppelten Integrale die independenten Veränderlichen x, y in x', y' umgesetzt werden sollen, und es ist:

$$dx = Pdx' + Qdy'$$
$$dy = P'dx' + Q'dy';$$

so ist die Größe, welche für $dxdy$ gesetzt werden muß, bekanntlich folgende:

$$(PQ' - P'Q)dx'dy'.$$

Wenn ferner in einem dreifachen Integrale für die unabhängigen Veränderlichen x, y, z drei neue x', y', z eingeführt werden sollen, und es ist:

$$dx = Pdx' + Qdy' + Rdz',$$
$$dy = P'dx' + Q'dy' + R'dz',$$
$$dz = P''dx' + Q''dy' + R''dz;$$

so muß bekanntlich für $dxdydz$ die Größe:

$$\{P(Q'R'' - Q''R') + P'(Q''R - QR'') + P''(QR' - Q'R)\}\, dx'dy'dz'$$

substituirt werden. —

Allgemein, wenn in einem $n$fachen Integrale für die n independenten Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eben so viele andere independente Veränderliche $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ eingeführt werden sollen, und es ist:

$$dx_1 = X_1 dx'_1 + X_2 dx'_2 + \&c. + X_n dx'_n,$$
$$dx_2 = X'_1 dx'_1 + X'_2 dx'_2 + \&c.$$
$$dx_3 = \&c.;$$

so ist die für:

$$dx_1 dx_2 dx_3 \ldots . dx_n$$

zu substituirende Größe bekanntlich:

$$R dx'_1 dx'_2 dx'_3 \ldots . dx'_n,$$

wo R die Resultante (Determinante) aus den n Größen:

$$X_1, X_2 \ldots . X_n$$

ist.

(2). Wir wollen nun den Fall betrachten, wo die Vertauschung der independenten Veränderlichen erst nach Verrichtung der ersten Integration geschehen soll. — Es seien:

$$\iint (P_1 - P_0) dydz, \quad \iint (Q_1 - Q_0) dxdz, \quad \iint (R_1 - R_0) dxdy,$$

die drei doppelten Integrale, welche durch bestimmte Integration aus den dreifachen Integralen:

$$\iiint \frac{dP}{dx} dxdydz, \quad \iiint \frac{dQ}{dy} dxdydz, \quad \iiint \frac{dR}{dy} dxdydz,$$

erhalten sind, für welche die Grenzen durch die Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

bestimmt werden, und man soll diese Integrale durch Vertauschung der independenten Veränderlichen in drei andere Integrale umsetzen, worin diese Veränderlichen dieselben sind. —

Da φ, ehe es für $x = x_0$ verschwindet, einen positiven, und ehe es für $x = x_1$ verschwindet, einen negativen Werth hat; so ist $\frac{d\varphi}{dx}$ für $x = x_0$ offenbar negativ, und für $x = x_1$ positiv. — Wenn also $\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}$ positiv genommen wird, so hat man:

$$P_1 = \left(\frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}} \right)_1, \quad -P_0 = \left(\frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}} \right);$$

folglich:

$$\iint (P_1 - P_0)\,dydz = \iint \left(\frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}} \right)_1 dydz + \iint \left(\frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}} \right)_0 dydz.$$

Dieſe beiden Integrale laſſen ſich aber offenbar in eins zuſammenfaſſen, nämlich:

$$\iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}\, dydx,$$

vorausgeſetzt, daß dieſes letzte Integral nur auf ſolche Werthesyſteme von x, y, z ausgedehnt wird, welche der Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

genügen. — Wir haben alſo zunächſt der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \iint (P_1 - P_0)\, dydz &= \iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}\, dydz, \\ \iint (Q_1 - Q_0)\, dzdx &= \iint \frac{Q\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}\, dzdx, \\ \iint (R_1 - R_0)\, dxdy &= \iint \frac{R\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\, dxdy. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Um dieſe Integrale ſo zu transformiren, daß ſie alle drei dieſelben

zwei Veränderlichen x, y enthalten, kann man entweder zwei neue Veränderliche anwenden, oder die beiden ersten Integrale müſſen auf x und y reducirt werden, was hier geſchehen ſoll. —

Geſetzt, es ſollte das Integral:

$$\iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}\,dydz$$

in ein anderes von der Form:

$$\iint M dxdy$$

transformirt werden; ſo iſt blos x für z einzuführen. — Da nun bei der Integration nach z in:

$$\iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}\,dydz$$

und bei der nach x in:

$$\iint M dydx$$

die Größe y als conſtant behandelt wird; ſo hat man offenbar die Gleichung:

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dz}\,dz = 0,$$

woraus erhellet, daß die abſoluten Werthe von $\frac{d\varphi}{dx}dx$ und $\frac{d\varphi}{dz}dz$ einander gleich ſind. — Weil aber bei der beſtimmten Integration die Incremente dx, dz immer als poſitiv gedacht werden, ſo iſt einleuchtend, daß die für dz zu ſubſtituirende Größe folgende iſt:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dx.$$

Man hat alſo endlich:

$$\iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}\,dydz = \iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy,$$

› ebenſo:

$$\iint \frac{Q\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}\,dxdz = \iint \frac{Q\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy,$$

$$\iint \frac{R\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy = \iint \frac{R\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy. \qquad \text{(B)}$$

s:

$$\varphi(x, y, y) = 0$$

ebe ſich durch Differenziren:

$$dz = pdx + qdy,$$

iſt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -p\frac{d\varphi}{dz}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = -q\frac{d\varphi}{dz},$$

o wenn man dieſe Werthe in die Gleichungen (B) ſubſtituirt; ſo ɔet man:

$$P_1 - P_0)dydz = \iint \frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}}dydz = -\iint \frac{Pp\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy,$$

$$Q_1 - Q_0)dxdz = \iint \frac{Q\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}dxdz = -\iint \frac{Qq\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy, \qquad \text{(C)}$$

$$R_1 - R_0)dxdy = \ldots\ldots\ldots\ldots \int \frac{R\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}\,dxdy.$$

ymmetriſche Ausdrücke, welche zuweilen nützlich ſind, ergeben ſich s den Gleichungen (A), wenn man ſetzt:

$$ds^2 = dx^2dy^2 + dx^2dz^2 + dy^2dz^2,$$

und man sieht leicht ein, daß diese Gleichungen auf die Form:

$$\left.\begin{aligned}\iint (P_1 - P_0)\,dydz &= \iint P\Omega\frac{d\varphi}{dx}\,ds,\\ \iint (Q_1 - Q_0)\,dxdz &= \iint Q\Omega\frac{d\varphi}{dy}\,ds,\\ \iint (R_1 - R_0)\,dxdy &= \iint R\Omega\frac{d\varphi}{dz}\,ds\end{aligned}\right\} \quad (D)$$

gebracht werden können, wo:

$$\Omega = \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ist. —

Diese Formeln ergeben sich auch leicht geometrisch. — Denn wenn:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer krummen Fläche, ds ihr Flächenelement und α, β, γ die Winkel darstellen, welche die Normale mit den Coordinatenaxen macht; so ist klar: daß man innerhalb der ganzen Ausdehnung des Integrales $\iint P_1 dydz$ hat:

$$dydz = \cos\alpha ds,$$

und in der Ausdehnung des Integrales $\iint P_0 dydz$ dagegen:

$$dydz = -\cos\alpha ds;$$

folglich:

$$\iint (P_1 - P_0)\,dydz = \iint P\cos\alpha\,ds,$$

und ebenso:

$$\iint (Q_1 - Q_0)\,dxdz = \iint Q\cos\beta ds,$$
$$\iint (R_1 - R_0)\,dzdy = \iint R\cos\gamma ds,$$

welche drei letzten Formeln offenbar mit (D) identisch sind, weil:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}},$$
$$\cos\beta = \&c.$$
$$\cos\gamma = \&c.$$

ist, wo die Wurzelgröße positiv genommen werden muß. —

96. Es ist bei Aufgaben, worin vielfache Integrale in Betracht kommen, oft nothwendig, die Grenzen so zu bestimmen, daß das Resultat die Grenze der Summe der Elemente:

$$Vdxdydz \ldots$$

für alle Werthesysteme der Independenten ausdrückt, für welche zwei gegebene Functionen:

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots)$$

entgegengesetzte Zeichen bekommen. — Dieser Fall läßt sich jedoch durch eine ganz einfache Betrachtung auf den früheren Fall zurückführen. — Gesetzt, das gegebene Integral soll auf alle Werthesysteme von $x, y, z, \ldots$ erstreckt werden, welche den Bedingungen:

$$\varphi(x, y, z, \ldots) < 0, \quad \psi(x, y, z, \ldots) > 0$$

genügen, wobei im Allgemeinen vorausgesetzt wird, daß jedes Werthesystem, welches der Bedingung:

$$\varphi(x, y, z, \ldots) > 0$$

genügt, auch der Bedingung:

$$\psi(x, y, z, \ldots) > 0$$

Genüge leistet — und ebenso in Bezug auf die Bedingungen:

$$\psi(x, y, z, \ldots) < 0$$

und:

$$\varphi(x, y, z, \ldots) < 0;$$

so ist offenbar:

$$\iiint \ldots Vdxdydz \ldots = (\iiint \ldots Vdxdydz \ldots) - [\iiint \ldots Vdxdydz \ldots],$$

wo das Integral zwischen ( ) auf alle Werthesysteme von $x, y, z, \ldots$ ausgedehnt werden muß, welche φ negativ machen, und das Integral zwischen [ ] auf alle Werthesysteme, welche ψ negativ machen. — Das gegebene Integral ist also auf zwei andere reducirt, wovon jedes nach den Vorschriften des frühern Falles behandelt werden kann. — Auch der jetzige Fall kann geometrisch erläutert werden, wenn das gegebene Integral ein zwei- oder dreifaches ist. In dem Falle einer Grenzfunction muß das Integral:

$$\iint V dx dy \text{ oder } \iiint V dx dy dz,$$

wie wir geſehen haben, durch den ganzen, von der Curve, oder Fläche:

$$\varphi = 0$$

eingeſchloſſenen Raum erſtreckt werden, während in dem gegenwärtigen Falle dieſer Raum der zwiſchen den beiden Curven, oder Flächen:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

liegende iſt — und die Bedingung: daß jedes Werthesyſtem, welches den Bedingungen:

$$\varphi > 0 \text{ oder } \psi < 0$$

genügt, auch den correſpondirenden Bedingungen:

$$\psi > 0 \text{ oder } \varphi < 0$$

Genüge leiſtet, beſteht, geometriſch ausgedrückt, darin: daß die Curve, oder Fläche:

$$\psi = 0$$

von der Curve, oder Fläche:

$$\varphi = 0$$

ganz umſchloſſen wird. —

97. Das vorhin in Bezug auf ein dreifaches Integral Geſagte läßt ſich ohne Schwierigkeit auf ein beliebig vielfaches Integral anwenden. — Zu dem Zwecke braucht man nur für die doppelten Integrale:

$$\iint (P_1 - P_0)\, dy dz, \quad \iint (Q_1 - Q_0)\, dx dz, \text{ &c.}$$

die vielfachen Integrale:

$$\iiint \ldots (P_1 - P_0)\, dy dz dt \ldots$$
$$\iiint \ldots (Q_1 - Q_0)\, dx dz dt \ldots$$
$$\text{&c. &c.}$$

und:

$$ds^2 = dx^2 dy^2 dt^2 \ldots + dx^2 dz^2 dt^2 \ldots + dy^2 dz^2 dt^2 \ldots + dx^2 dy^2 dz^2 \ldots + \text{&c.}$$

zu ſetzen. —

Die Formeln (C) und (D) werden leicht dem Falle eines doppelten Integrales angepaßt, wenn man y entfernt und y für z in das Resultat setzt. Alsdann werden die beiden ersten der Gleichungen (C) und (D) offenbar:

$$\int(P_1 - P_0)dy = -\int P\frac{dy}{dx}\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}dx = \int\frac{P\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}+\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}ds,$$

$$\int(Q_1 - Q_0)dx = \int\frac{Q\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}dx = \int\frac{Q\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}+\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}ds, \qquad \text{(E)}$$

wo der Werth von $\frac{dy}{dx}$ durch Differentiation der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

und:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

erhalten wird. —

Sechstes Kapitel.

Variationen der Functionen von zwei und mehr unabhängigen Veränderlichen.

Aufgabe 1.

98. Wenn u eine unbeſtimmte Function von beliebig vielen independenten Veränderlichen x, y, z, ... iſt, die Totalvarition des Differentialquotienten:

$$\frac{d^{m+n+p+\&c.}u}{dx^m dy^n dz^p \ldots}$$

zu finden. —

Aufl. Dieſe Größe kann ſich offenbar nur auf zwei verſchiedene Weiſen ändern; nämlich: 1) in Folge von Werthsänderungen der independenten Veränderlichen x, y, z, ... und 2) in Folge einer Formänderung der Function u. — Die den unendlich kleinen Werthsänderungen dx, dy, dz, ... der independenten Veränderlichen x, y, z, ... entſprechenden Aenderungen des gegebenen Differentialquotienten ſind offenbar:

$$\frac{d^{m+1+n+p+\&c.}u}{dx^{m+1} dy^n dz^p \ldots} dx,$$

$$\frac{d^{m+n+1+p+\&c.}u}{dx^m dy^{n+1} dz^p \ldots} dy, \text{ \&c.}$$

Da ferner das Symbol:

$$\frac{d^{m+n+p+\&c.}}{dx^m dy^n dz^p \ldots}$$

der Bedingung:

$$F.\varphi + F.\psi = F(\varphi + \psi)$$

genügt, so hat man nach Nr. 5 für die von der Formänderung von u allein herrührende Aenderung des gegebenen Differentialquotienten:

$$\delta . \frac{d^{m+n+p+\&c.}u}{dx^m dy^n dz^p \ldots} = \frac{d^{m+n+p+\&c.}\delta u}{dx^m dy^n dz^p \ldots},$$

und folglich nach Nr. 6 für die gesuchte Totalvariation:

$$D . \frac{d^{m+n+p+\&c.}u}{dx^m dy^n dz^p \ldots} = \frac{d^{m+1+n+p+\&c.}u}{dx^{m+1} dy^n dz^p \ldots} dx + \frac{d^{m+n+1+p+\&c.}u}{dx^m dy^{n+1} dz^p \ldots} dy + \&c. \quad (A)$$

$$+ \frac{d^{m+n+p+\&c.}\delta u}{dx^m dy^n dz^p \ldots}.$$

Aufgabe II.

99. Die Totalvariation des Ausdruckes:

$$V = f\left(x, y, z, \ldots u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \ldots\right)$$

zu finden, wenn f eine bestimmte Function der eingeklammerten Größen bedeutet, $x, y, z, \ldots$ beliebig viele independente Veränderliche sind und u eine unbestimmte Function derselben ist. —

Aufl. Wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{dV}{d . \frac{d^{m+n+p+\&c}u}{dx^m dy^n dz^p \ldots}}$$

durch:

$$V_{x^m y^n z^p \ldots}$$

und:

$$\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}, \ldots \frac{dV}{du}$$

resp. durch:

$$X, Y, Z, \ldots U$$

bezeichnen; so haben wir:

$$dV = Xdx + Ydy + Zdz + \&c. + Udu$$

$$+ V_x d.\frac{du}{dx} + V_y d.\frac{du}{dy} + V_z d.\frac{du}{dz} + \&c. + V_{x^2} d.\frac{d^2u}{dx^2} + V_{xy} d.\frac{d^2u}{dxdy} + \&c.$$

Bekommt nun x den unendlich kleinen Zuwachs dx, indem die übrigen Independenten y, z, ... ſowohl, als die Form der Function u ungeändert bleiben; ſo iſt die entſprechende Aenderung von V offenbar:

$$\left(X + U\frac{du}{dx} + V_x\frac{d^2u}{dx^2} + V_y\frac{d^2u}{dxdy} + V_z\frac{d^2u}{dxdz} + \&c.\right.$$

$$\left. + V_{x^2}\frac{d^3u}{dx^3} + V_{xy}\frac{d^3u}{dx^2dy} + \&c.\right) dx,$$

was der Kürze wegen durch:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx$$

bezeichnet werden ſoll. —

Ebenſo iſt, wenn y das unendlich kleine Increment dy bekommt, die entſprechende unendlich kleine Aenderung von V:

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) dy,$$

u. ſ. f. für die übrigen Independenten. —

Aendert ſich endlich die Form der Function u, während alles Uebrige conſtant bleibt; ſo hat man nach (5) in Nr. 7, da V eine beſtimmte Function von $x, y, z, \ldots u, \frac{du}{dx}, \ldots$ iſt, offenbar:

$$\delta V = U\delta u + V_x\delta.\frac{du}{dx} + V_y\delta.\frac{du}{dy} + V_z\delta.\frac{du}{dz} + V_{x^2}\delta.\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$+ V_{xy}\delta.\frac{d^2u}{dxdy} + \&c.$$

Setzt man hierin für:

$$\delta.\frac{du}{dx}, \quad \delta.\frac{du}{dy}, \ \&c.$$

ihre Werthe nach Aufg. I und bildet nach dem allgemeinen Principe

in Nr. 6 die Summe der Partialänderungen; so erhält man endlich als die gesuchte Totalvariation:

$$DV = \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)dz + \&c.$$

$$+ U\delta u + V_x\frac{d\delta u}{dx} + V_y\frac{d\delta u}{dy} + V_z\frac{d\delta u}{dz} + \&c. \qquad (A)$$

$$+ V_{x^2}\frac{d^2\delta u}{dx^2} + V_{xy}\frac{d^2\delta u}{dxdy} + \&c.$$

Die eigentliche (reine) Variation von V, d. h. die, welche von der bloßen Formänderung von u herrührt, ist offenbar:

$$\delta V = U\delta u + V_x\frac{d\delta u}{dx} + V_y\frac{d\delta u}{dy} + V_z\frac{d\delta u}{dz} + \&c.$$

$$+ V_{x^2}\frac{d^2\delta u}{dx^2} + V_{xy}\frac{d^2\delta u}{dxdy} + \&c.$$

100. Wenn man ein doppeltes Integral betrachtet, so pflegt man z als die abhängige Veränderliche zu behandeln — und wenn man setzt:

$$Z = \frac{dV}{dz},$$

so hat man:

$$\delta V = Z\delta z + V_x\frac{d\delta z}{dx} + V_y\frac{d\delta z}{dy} + V_{x^2}\frac{d^2\delta z}{dx^2} + V_{xy}\frac{d^2\delta z}{dxdy} + V_{y^2}\frac{d^2\delta z}{dy^2} + \&c.$$

Bei der Aufsuchung der Variation vielfacher Integrale werden wir der Einfachheit wegen uns auf die Betrachtung von doppelten und dreifachen Integralen beschränken, weil sich das dabei Gesagte leicht verallgemeinern läßt, und die Anzahl der Glieder des Resultates mit jeder neuen Veränderlichen so rasch zunimmt, daß wir bei mehr als drei Veränderlichen sehr complicirte Formeln erhalten würden, welche von gar keinem praktischen Nutzen wären. —

Aus demselben Grunde werden wir voraussetzen, daß V keine höhern Differentialquotienten als vom zweiten Grade enthält.

Aus den Untersuchungen im vorhergehenden Kapitel erhellet leicht: daß der Werth eines vielfachen Integrales, in dem dort ange-

gebenen beſchränkten Sinne, von zwei weſentlich verſchiedene Elementen abhängt; nämlich: 1) von der Form der Function φ, welche die Grenzen beſtimmt, und: 2) von der Form der Function V unter dem Integralzeichen. — Eine Aenderung in jedem dieſer beiden Elemente bewirkt eine entſprechende Aenderung in dem Werthe des Integrales — und die Totalvariation deſſelben iſt nach dem allgemeinen Principe in Nr. 6 die Summe der Partialvariationen, welche daher einzeln ermittelt werden müſſen.

Wir wollen deshalb zuerſt die von der Formänderung der Grenzfunction φ herrührende Partialvariation ſuchen, indem wir ſucceſſive den Fall eines doppelten und den eines dreifachen Integrales betrachten werden. —

Aufgabe III.

101. Wenn V eine Function der beiden independenten Veränderlichen x, y iſt, die Variation des Integrales $\iint V dx dy$ zu finden, welche von einer unendlich kleinen Aenderung in der Form der Grenzfunction $\varphi(x, y)$ herrührt. —

Aufl. Wir wollen wieder annehmen: daß die für y aufgelöſte Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

nur zwei Werthe y_0, y_1 für y gibt, und daß dieſe Werthe in Folge der Formänderung von φ reſp. werden $y_0 + \delta y_0$ und $y_1 + \delta y_1$; ſo iſt klar, daß die Variation des beſtimmten Integrales bei der erſten Integration durch:

$$\int V_1 \delta y_1 dx - \int V_0 \delta y_0 dx$$

ausgedrückt wird. —

Um die Variation bei der zweiten Integration zu finden, ſetzen wir:

$$V' = \int_{y_0}^{y_1} V dy,$$

und die Variationen in den Grenzwerthen von x ſeien δx_0, δx_1; ſo erhellet ebenſo, daß die Variation bei der zweiten Integration ausgedrückt wird durch:

$$V'_1 \delta x_1 - V'_0 \delta x_0,$$

wo V'_0, V'_1 die Werthe von V' für $x = x_0$ und $x = x_1$ bedeuten. — Da aber x_0, x_1 durch Elimination von y zwischen den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

gefunden werden, so ist einleuchtend, daß für $x = x_0$ oder $x = x_1$ auch $y_0 = y_1$ ist. — Denn wenn $\varphi = 0$ als eine Gleichung mit zwei Wurzeln $y = y_0$, $y = y_1$ betrachtet wird, so sind diese Wurzeln bekanntlich einander gleich, wenn $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ ist. — Aber die Werthe $x = x_0$, $x = x_1$ genügen der Gleichung $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, und machen folglich die beiden Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$ einander gleich. — Da also die Integrationsgrenzen in V'_0, V'_1 einander gleich werden, so ist offenbar $V'_0 = 0$, $V'_1 = 0$, und mithin verschwindet dieser Theil der Variation von selbst.

Dieselben Schlüsse lassen sich leicht auf beliebig vielfache Integrale ausdehnen. — Betrachtet man z. B. das dreifache Integral:

$$\iiint V dx dy dz,$$

und setzt:

$$V' = \int_{z_0}^{z_1} V dz,$$

so erhellet ganz in der derselben Weise: daß die Variation bei der Integration nach y von selbst verschwindet. — Setzt man weiter:

$$V'' = \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} V dy dz,$$

so ergibt sich in Bezug auf die Variation bei der Integration nach x dasselbe Resultat. — Hinsichtlich des Theiles der Variation, welcher von einer Formänderung der Grenzfunction herrührt, kommen wir demnach zu dem allgemeinen Resultate:

„Wenn V eine Function von beliebig vielen independenten Veränderlichen x, y, z, ... ist, so wird die Variation des bestimmten Integrals:

$$\iiint \ldots V dx dy dz \ldots,$$

welche blos von einer Aenderung in der Form der Grenzfunction φ herrührt, ausgedrückt durch:

$$\iint \ldots V_1 \delta z_1 dxdy \ldots \quad - \iint \ldots V_0 \delta z_0 dxdy \ldots$$

worin V_0, V_1 resp. die Werthe von V für $z = z_0$, $z = z_1$ bedeuten." —

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß die Reduction dieses Theiles der Variation auf zwei Glieder nicht für alle vielfachen bestimmten Integrale stattfindet, sondern nur bei der Klasse, auf welche wir uns hier beschränken. —

Aufgabe IV.

102. Wenn V eine bestimmte Function von:

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^2z}{dy^2}$$

und z eine unbestimmte Function von x, y ist, die Variation des stimmten Integrales $\iint V dxdy$ zu finden, welche von einer unendlich kleinen Aenderung in der Form der Function z herrührt. —

Aufl. Da die Grenzfunction φ jetzt als von unveränderlicher Form vorausgesetzt wird, so ist klar, daß das Operationssymbol $\iint$ dem Distributivgesetze genügt (Nr. 5), und man folglich hat:

$$\delta . \iint V dxdy = \iint \delta V dxdy.$$

Setzt man nun für δV seinen Werth aus Aufg. II, so erhält man:

$$\delta \iint V dxdy =$$

$$\iint \left(Z\delta z + V_x \frac{d\delta z}{dx} + V_y \frac{d\delta z}{dy} + V_{x^2} \frac{d^2\delta z}{dx^2} + V_{xy} \frac{d^2\delta z}{dxdy} + V_{y^2} \frac{d^2\delta z}{dy^2} \right) dxdy. \qquad (A)$$

Da aber bei der besondern Art bestimmter Integrale, womit wir uns jetzt beschäftigen, die Reihenfolge der einzelnen Integrationen gleichgültig ist; so ergibt sich durch das Verfahren der theilweisen Integration:

$$\iint V_x \frac{d\delta z}{dx}\,dxdy = \int V_x \delta z dy - \iint \frac{dV_x}{dx}\,\delta z dxdy,$$

$$\iint V_y \frac{d\delta z}{dy}\,dxdy = \int V_y \delta z dx - \iint \frac{dV_y}{dy}\,\delta z dxdy,$$

$$\iint V_{x^2} \frac{d^2\delta z}{dx^2}\,dxdy = \int V_{x^2} \frac{d\delta z}{dx}\,dy - \iint \frac{dV_{x^2}}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\,dxdy$$

$$= \int V_{x^2} \frac{d\delta z}{dx}\,dy - \int \frac{dV_{x^2}}{dx}\,\delta z dy + \iint \frac{d^2 V_{x^2}}{dx^2}\,\delta z dxdy,$$

$$\iint V_{xy} \frac{d^2\delta z}{dxdy}\,dxdy = \int V_{xy} \frac{d\delta z}{dy}\,dy - \int \frac{dV_{xy}}{dx}\,\delta z dx + \iint \frac{d^2 V_{xy}}{dxdy}\,\delta z dxdy,$$

oder wenn zuerſt nach y integrirt wird:

$$\iint V_{xy} \frac{d^2\delta z}{dxdy}\,dxdy = \int V_{xy} \frac{d\delta z}{dx}\,dx - \int \frac{dV_{xy}}{dy}\,\delta z dy + \iint \frac{d^2 V_{xy}}{dxdy}\,\delta z dxdy,$$

$$\iint V_{y^2} \frac{d^2\delta z}{dy^2}\,dxdy = \int V_{y^2} \frac{d\delta z}{dy}\,dx - \int \frac{dV_{y^2}}{dy}\,\delta z dx + \iint \frac{d^2 V_{y^2}}{dy^2}\,dz dxdy.$$

In dieſen Ausdrücken ſind die Glieder mit einfachen Integralen der Kürze wegen nur einmal geſetzt; aber da bei jedem ſolcher Glieder die Operation der beſtimmten Integration als ſchon verrichtet gedacht wird, ſo muß eigentlich für jedes die Differenz zweier anderer geſetzt werden, wovon ſich das eine auf den erſten und das andere auf den zweiten Grenzwerth von z bezieht. — So z. B. müßte für $\int V_x \delta z dy$ eigentlich geſetzt werden:

$$(\int V_x \delta z dy)_1 - (\int V_x \delta z dy)_0,$$

und ähnlich verhält es ſich mit den andern Gliedern. —

Wenn man nun die verſchiedenen, vorhin angeführten Glieder zuſammenfaßt und ſetzt der Symmetrie wegen die halbe Summe der beiden Werthe von:

$$\iint V_{xy} \frac{d^2 dz}{dxdy}\,dxdy,$$

ſo erhält man:

$$\delta\iint V dx dy = \int\left\{\left(V_y - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx}\right)\delta z + \tfrac{1}{2}V_{xy}\frac{d\delta z}{dx} + V_{y^2}\frac{d\delta z}{dy}\right\} dx$$

$$+ \int\left\{\left(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy}\right)\delta z + V_{x^2}\frac{d\delta z}{dx} + \tfrac{1}{2}V_{xy}\frac{d\delta z}{dy}\right\} dy \qquad (B)$$

$$+ \iint\left(Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \frac{d^2V_{x^2}}{dxdy} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2}\right)\delta z dx dy.$$

103. Ehe wir weiter gehen, müſſen wir noch ausdrücklich bemerken: daß ein Ausdruck wie:

$$\int V_{xy}\frac{d\delta z}{dx}\,dx$$

nicht ein zweites Mal theilweiſe integrirt werden kann, ſo daß man etwa hätte:

$$\int V_{xy}\frac{d\delta z}{dx}\,dx = V_{xy}\delta z - \int\frac{dV_{xy}}{dx}\,\delta z dx.$$

Denn in allen Gliedern mit dem einfachen Integralzeichen ſind ſchon zweierlei Operationen vorgenommen; nämlich: 1) die einfache Integration in Bezug auf eine Veränderliche, z. B. y, deren Differential alſo verſchwunden iſt — und: 2) die Subſtitution einer Function von x für y in das Reſultat dieſer Integration. Es iſt alſo δz in dem Ausdrucke:

$$\int V_{xy}\frac{d\delta z}{dx}\,dx$$

keine Function von x und y, ſondern nur von x; und mithin iſt $\frac{d\delta z}{dx}$, welches ein in der Vorausſetzung, daß δz eine Function von x und y iſt, genommener partieller Differentialquotient nach x iſt, nur ein Theil des Differentialquotienten nach x, wenn δz blos eine Function von x geworden iſt. — In der That, wenn der vollſtändige Differentialquotient nach x mit $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$ bezeichnet wird; ſo iſt offenbar:

$$\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) = \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta z}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

wo der Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

herzuleiten ist.*) —

104. Der obige Ausdruck für $\delta\iint V dx dy$ besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Arten von Gliedern — nämlich: 1) aus einer Anzahl theilweise integrirter Glieder, d. h. solcher, worin nur noch ein Integralzeichen vorkommt — und: 2) aus einer Anzahl völlig unintegrirter Glieder, d. h. solcher, welche noch das doppelte Integralzeichen vor sich haben. — Was diese Letztern anlangt, so gestatten sie offenbar keine weitere Reduction, weil darin nur eine unbestimmte Variation δz vorkommt. — Aber mit den Erstern müssen erst zwei verschiedene Reductionen vorgenommen werden, ehe der obige Ausdruck von $\delta\iint V dx dy$ angewandt werden kann — nämlich: 1) müssen die independenten Veränderlichen so vertauscht werden, daß man in allen diesen Gliedern nur nach derselben Veränderlichen zu integriren hat — und: 2) muß die Anzahl der Variationen:

$$\delta z, \frac{d\delta z}{dx}, \frac{d\delta z}{dy}$$

vermindert werden. — Denn da die einfachen Integrationen nur auf solche Werthe von x und y erstreckt werden, welche der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

genügen; so sind diese Variationen nicht mehr alle independent von einander — und es muß deshalb ihre Anzahl so weit reducirt werden, daß die zurückbleibenden Variationen ganz unabhängig von einander sind. — Wir wollen deshalb jetzt näher zeigen, wie diese beiden Arten von Reductionen ausgeführt werden können. —

Aufgabe V.

105. Die in dem Ausdrucke von $\delta\iint V dx dy$ vorkommenden

*) Die obige Bemerkung rührt von Poisson her (Mém de l'Inst. Tm. VII p. 296). Lacroix hat durch Nichtbeachtung derselben für die Variation eines doppelten Integrales einen unrichtigen Ausdruck gegeben (Traité du Calcul Diff. et Int. tm. II. p. 785).

einfachen Integrale auf andere zu reduciren, worin die Integration in Bezug auf dieſelbe Veränderliche geſchieht. —

Aufl. Dieſe Reduction läßt ſich leicht mittelſt der im vorhergehenden Kapitel entwickelten Formeln bewerkſtelligen — und man kann nach dem dort Geſagten immer annehmen, daß in den reducirten Integralen x die independente Veränderliche iſt. — Da aber nach Nr. 97 allgemein:

$$\int (P_1 - P_0)\,dy = -\int P \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}} dx$$

iſt, ſo hat man:

$$\int \left\{ \left(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} \right)\delta z + V_{x^2}\frac{d\delta z}{dx} + \tfrac{1}{2} V_{xy}\frac{d\delta z}{dy} \right\} dy$$

$$= -\int \left\{ \left(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} \right)\delta z + V_{x^2}\frac{d\delta z}{dx} + \tfrac{1}{2} V_{xy}\frac{d\delta z}{dy} \right\} \frac{dy}{dx} k\,dx,$$

worin der Kürze wegen geſetzt iſt:

$$k = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}.$$

Hiernach findet man:

$$\delta \iint V dx dy = \int \left(\xi \delta z + \xi \frac{d\delta z}{dx} + \eta \frac{d\delta z}{dy} \right) k\,dx + \iint \Omega \delta z\, dx dy, \qquad (C)$$

wo:

$$\xi = V_y - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx} - \left(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} \right)\frac{dy}{dx},$$

$$\eta = V_{y^2} - \tfrac{1}{2} V_{xy}\frac{dy}{dx}, \quad \xi = \tfrac{1}{2} V_{xy} - V_{x^2}\frac{dy}{dx},$$

$$\Omega = Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \frac{d^2 V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2 V_{xy}}{dx dy} + \frac{d^2 V_{y^2}}{dy^2}$$

geſetzt und der Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

abzuleiten iſt. —

Aufgabe VI.

106. Die Anzahl der in dem Ausdrucke von $\delta\iint V dx dy$ unter dem einfachen Integralzeichen vorkommenden Variationen:

$$\delta z,\ \frac{d\delta z}{dx},\ \frac{d\delta z}{dy}$$

ſo weit zu verkleinern, daß die zurückbleibenden independent von einander ſind.

Aufl. Bezeichnen wir den vollſtändigen Differentialquotienten von δz nach x, in der Vorausſetzung: daß x die einzige independente Veränderliche iſt, wieder mit $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$; ſo haben wir:

$$\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) = \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta z}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

und mithin iſt in den einfachen Integralen:

$$\frac{d\delta z}{dx} = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - \frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta z}{dy}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in:

$$\int \xi \frac{d\delta z}{dx}\, dx,$$

und integrirt das Glied:

$$\int \xi \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) dx$$

theilweiſe; ſo erhält man:

$$\int \xi \frac{d\delta z}{dx}\, dx = \int \left(\frac{d.\xi\delta z}{dx}\right) dx - \int \left(\frac{d\xi}{dx}\right) \delta z dx - \int \xi \frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta z}{dy}\, dx.$$

Nun läßt ſich aber leicht zeigen, daß jedes in dem fraglichen Ausdrucke vorkommende Glied von der Form:

$$\int \left(\frac{d\theta}{dx}\right) dx$$

von ſelbſt verſchwinden muß. — Denn man muß ſich erinnern,

daß jedes ſolches Glied eigentlich **doppelt** vorkommt, ſo daß man ſtatt $\frac{d\theta}{dx}$ eigentlich hat:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_1 - \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0,$$

wo dieſe beiden Glieder reſp. die Werthe von $\frac{d\theta}{dx}$ für $y = y_0$ und $y = y_1$ bedeuten. — Wenn aber x_0, x_1 die aus den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

abgeleiteten Werthe von x ſind, ſo iſt der vollſtändige Ausdruck jedes Gliedes von der Form:

$$\int\left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx$$

offenbar folgender:

$$\int\left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_1 dx - \int\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 dx = (\theta_1)_1 - (\theta_1)_0 - (\theta_0)_1 + (\theta_0)_0,$$

wo:

$(\theta_1)_1$ der Werth von θ iſt für $y = y_1$, $x = x_1$,

$(\theta_1)_0$ . . . . . $y = y_1$, $x = x_0$,

$(\theta_0)_1$ . . . . . $y = y_0$, $x = x_1$,

$(\theta_0)_0$ . . . . . $y = y_0$, $x = x_0$.

Wir haben aber geſehen (S. 249), daß für $x = x_0$ oder $x = x_1$ auch $y_0 = y_1$ iſt; mithin iſt:

$$(\theta_1)_1 = (\theta_0)_1, \quad (\theta_1)_0 = (\theta_0)_0,$$

und folglich allgemein:

$$\int\left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx = 0.$$

In dem vorliegenden Falle iſt alſo:

$$\int\left(\frac{d.\xi\delta z}{dx}\right)dx = 0,$$

und man hat mithin:

$$\int \xi \frac{d\delta z}{dx} dx = -\int \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) \delta z dx - \int \xi \frac{dy}{dx}\frac{d\delta z}{dy} dx.$$

Substituirt man dies in den Ausdruck (C), setzt für ξ, η, ξ, Ω ihre Werthe und fügt die in Aufg. III gefundene, von der Formänderung der Grenzfunction φ herrührende Variation hinzu; so erhält man als die gesuchte Totalvariation:

$$D.\iint V dx dy = \int V k \delta y dx + \int \left(V_{x^2}\frac{dy^2}{dx^2} - V_{xy}\frac{dy}{dx} + V_{y^2}\right) k \frac{d\delta z}{dy} dx$$

$$+ \int \left(V_y - V_x + 2\frac{dV_{x^2}}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{dV_{x^2}}{dy}\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \frac{dV_{xy}}{dx} + V_{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) k \delta z dx$$

$$+ \iint \left(Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2}\right) \delta z dx dy, \quad \text{(D)}$$

wo die einfachen Integrale dieses Ausdruckes auf alle Werthe von x und y erstreckt werden müssen, welche der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

genügen. — Hat man zwei Grenzfunctionen φ, ψ, d. h. werden die Grenzen des Integrales wie S. 241 bestimmt; so wird die vorhergehende Formel offenbar diesem Falle angepaßt, wenn man für jedes einfache Integral die Differenz zweier andern setzt, wovon das eine auf alle Werthe von x und y erstreckt wird, welche der Gleichung genügen:

$$\varphi = 0,$$

und das andere auf alle Werthe, welche der Gleichung:

$$\psi = 0$$

Genüge leisten. — So hat man z. B. statt des einzelnen Gliedes:

$$\int V k \delta y dx,$$

die Differenz:

$$\int V k \delta y dx - \int V k' \delta y dx,$$

worin:

$$k' = -\frac{\frac{d\psi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi^2}{dy^2}\right)}}, \quad k = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)}}$$

iſt; und ähnlich verhält es ſich in Beziehung auf die andern Glieder.—

Aufgabe VII.

107. Die Totalvariation von:

$$\iiint V dx dy dz$$

zu finden, wenn:

$$V = f\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dxdz}, \frac{d^2u}{dydz}\right)$$

iſt. —

Aufl. Die Totalvariation eines dreifachen Integrales, wie das obige, iſt wieder die Summe der Partialvariationen, welche reſp. von einer unendlich kleinen Aenderung in der Form der Grenzfunctionen φ, ψ, oder wenigſtens einer derſelben, und in der der Function u herrühren. Die von der erſten Urſache herrührende Variation iſt, wenn man nur eine Grenzfunction hat, offenbar (Nr. 101):

$$\iint V k \delta z dx dy,$$

und bei zwei Grenzfunctionen:

$$\iint V k \delta z dx dy - \iint V k' \delta z dx dy,$$

indem:

$$k = \frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}, \quad k' = \frac{\frac{d\psi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi^2}{dz^2}\right)}}$$

iſt. — Dagegen iſt die andere, von der Formänderung des u herrührende Partialvariation:

$$\delta . \iiint V dx dy dz = \iiint \delta V dx dy dz,$$

und wenn man für δV ſeinen Werth aus Aufg. II ſetzt:

$$\delta . \iiint V dx dy dz =$$

$$\iiint \Big(U\delta u + V_x \frac{d\delta u}{dx} + V_y \frac{d\delta u}{dy} + V_z \frac{d\delta u}{dz} + V_{x^2} \frac{d^2\delta u}{dx^2} + V_{y^2} \frac{d^2\delta u}{dy^2} + V_{z^2} \frac{d^2\delta u}{dz^2}$$

$$+ V_{xy} \frac{d^2\delta u}{dxdy} + V_{xz} \frac{d^2\delta u}{dxdz} + V_{yz} \frac{d^2\delta u}{dydz} \Big) du dx dy dz. \qquad (A)$$

Reducirt man dieſen Ausdruck, wie bei einem doppelten Integrale, durch theilweiſe Integration, vereinigt die verſchiedenen Glieder und ſetzt der Symmetrie wegen die halbe Summe der beiden verſchiedenen Ausdrücke, welche man für jedes der Glieder:

$$\iiint V_{xy} \frac{d^2\delta u}{dxdy} dxdydz, \quad \iiint V_{xz} \frac{d^2\delta u}{dxdz} dxdydz, \quad \iiint V_{yz} \frac{d^2\delta u}{dydz} dxdydz,$$

erhält; ſo bekommt man endlich:

$$\delta . \iiint V dx dy dz$$

$$= \iint \Big\{ \Big(V_z - \frac{dV_{z^2}}{dz} - \tfrac{1}{2} \frac{dV_{yz}}{dy} - \tfrac{1}{2} \frac{dV_{xz}}{dx} \Big) \delta u$$

$$+ V_{z^2} \frac{d\delta u}{dz} + \tfrac{1}{2} V_{xz} \frac{d\delta u}{dx} + \tfrac{1}{2} V_{yz} \frac{d\delta u}{dy} \Big\} dxdy$$

$$+ \iint \Big\{ \Big(V_y - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \tfrac{1}{2} \frac{dV_{yz}}{dz} - \tfrac{1}{2} \frac{dV_{xy}}{dx} \Big) \delta u$$

$$+ V_{y^2} \frac{d\delta u}{dy} + \tfrac{1}{2} V_{xy} \frac{d\delta u}{dx} + \tfrac{1}{2} V_{yz} \frac{d\delta u}{dz} \Big\} dxdz \qquad (B)$$

$$+ \iint \Big\{ \Big(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2} \frac{dV_{xy}}{dy} - \tfrac{1}{2} \frac{dV_{xz}}{dz} \Big) \delta u$$

$$+ V_{x^2} \frac{d\delta u}{dx} + \tfrac{1}{2} V_{xy} \frac{d\delta u}{dy} + \tfrac{1}{2} V_{xz} \frac{d\delta u}{dz} \Big\} dydz$$

$$+ \iiint \Big(U - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} - \frac{dV_z}{dz}$$

$$+ \frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2} + \frac{d^2V_{z^2}}{dz^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{xz}}{dxdz} + \frac{d^2V_{yz}}{dydz} \Big) \delta u dx dy dz.$$

108. Mit dieſer Formel müſſen, ehe ſie angewandt werden kann, wieder zwei verſchiedene Arten von Reductionen vorgenommen

werden — nämlich: 1) müſſen die darin vorkommenden verſchiedenen Doppelintegrale in andere transformirt werden, worin die Integrationen nach *denſelben* independenten Veränderlichen geſchehen — und 2) müſſen die unter dem doppelten Integralzeichen vorkommenden Variationen:

$$\delta u,\ \frac{d\delta u}{dx},\ \frac{d\delta u}{dy},\ \frac{d\delta u}{dz}$$

auf eine *kleinere* Anzahl von einander *unabhängiger* Variationen reducirt werden. —

Die *erſte* dieſer Reductionen wird, wie in dem Falle eines doppelten Integrales, leicht mittelſt der Formeln in Nr. 95 verrichtet, welche dem gegenwärtigen Falle angepaßt werden, wenn man ſetzt:

$$P = \Big(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xz}}{dz}\Big)\delta u + V_{x^2}\frac{d\delta u}{dx} + \tfrac{1}{2}V_{xy}\frac{d\delta u}{dy} + \tfrac{1}{2}V_{xz}\frac{d\delta u}{dz},$$

$$Q = \Big(V_y - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{yz}}{dz} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx}\Big)\delta u + V_{y^2}\frac{d\delta u}{dy} + \tfrac{1}{2}V_{xy}\frac{d\delta u}{dx} + \tfrac{1}{2}V_{yz}\frac{d\delta u}{dz},$$

$$R = \Big(V_z - \frac{dV_{z^2}}{dz} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{yz}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xz}}{dx}\Big)\delta u + V_{z^2}\frac{d\delta u}{dz} + \tfrac{1}{2}V_{xz}\frac{d\delta u}{dx} + \tfrac{1}{2}V_{yz}\frac{d\delta u}{dy},$$

und geben:

$$\delta\iiint V dx dy dz = \iint\Big(Y\delta u + \Phi\frac{d\delta u}{dx} + \Theta\frac{d\delta u}{dy} + \Psi\frac{d\delta u}{dz}\Big)k dx dy + \iiint\Omega\delta u dx dy dz, \qquad (C)$$

wo:

$$Y = V_z - \frac{dV_{z^2}}{dz} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{yz}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xz}}{dx} - q\Big(V_y - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{yz}}{dz} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx}\Big) - p\Big(V_x - \frac{dV_{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} - \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xz}}{dz}\Big)$$

$$\Phi = -pV_{xz} - \tfrac{1}{2}qV_{xy} + \tfrac{1}{2}V_{xz},$$

$$\Theta = -qV_{yz} + \tfrac{1}{2}pV_{xy} + \tfrac{1}{2}V_{yz},$$

$$\Psi = V_{xz} - \tfrac{1}{2}pV_{xz} - \tfrac{1}{2}qV_{yz},$$

$$\Omega = U - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz} +$$

$$\frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2} + \frac{d^2V_{z^2}}{dz^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{xz}}{dxdz} + \frac{d^2V_{yz}}{dydz}.$$

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad k = \frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)}}$$

ist. —

109. Wir haben nun noch so viel als thunlich die Anzahl der Variationen:

$$\delta u, \quad \frac{d\delta u}{dx}, \quad \frac{d\delta u}{dy}, \quad \frac{d\delta u}{dz}$$

oder:

$$\delta u, \quad \delta . \frac{du}{dx}, \quad \delta . \frac{du}{dy}, \quad \delta . \frac{du}{dz}$$

zu reduciren. — Da aber x, y, z durch die Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

verknüpft sind; so hat man für die vollständigen Differentialquotienten von δz in Bezug auf x und y nach der Substitution des Werthes von z, in x und y ausgedrückt:

$$\left(\frac{d\delta u}{dx}\right) = \frac{d\delta u}{dx} + p\frac{d\delta u}{dz},$$

$$\left(\frac{d\delta u}{dy}\right) = \frac{d\delta u}{dy} + q\frac{d\delta u}{dz};$$

folglich:

$$\frac{d\delta u}{dx} = \left(\frac{d\delta u}{dx}\right) - p\frac{d\delta u}{dz},$$

$$\frac{d\delta u}{dy} = \left(\frac{d\delta u}{dy}\right) - p\frac{d\delta u}{dz}.$$

Setzt man dieſe Werthe in den Ausdruck von:

$$\delta . \iiint V dx dy dz,$$

und bemerkt, daß:

$$\iint \Phi \left(\frac{d\delta u}{dx}\right) k dx dy = -\iint \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) k dx dy,$$

$$\iint \Theta \left(\frac{d\delta u}{dy}\right) k dx dy = -\iint \left(\frac{d\Theta}{dx}\right) k dx dy$$

iſt;*) ſo erhält man endlich:

$$\delta \iiint V dx dy dz = \iint \left\{ Y - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - \left(\frac{d\Theta}{dy}\right) \right\} k \delta u dx dy$$

$$+ \iint (\Psi - p\Phi - q\Theta) \frac{d\delta u}{dz} k dx dy$$

$$+ \iiint \Omega \delta u dx dy dz.$$

Dieſer Ausdruck beſteht, wie in dem Falle eines einfachen Integrales, aus zwei weſentlich verſchiedenen Theilen; nämlich: 1) aus einer Anzahl von Gliedern, welche von der Formänderung von u und ſeiner Differentialquotienten herrühren; aber nicht für alle Werthe der independenten Veränderlichen, ſondern nur für die, welche der Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

genügen — und 2) aus einem Gliede, welches von einer Aenderung in der allgemeinen Form der Function u herrührt.

Addirt man hierzu noch die der zweiten Grenzfunction entſprechenden Glieder, ſowie die Glieder:

$$\iint V k \delta z dx dy - \iint V k' \delta z dx dy,$$

---

*) Es läßt ſich auch hier, wie früher (Nr. 106), leicht zeigen: daß jedes einfache Integral, wie:

$$\int \Phi \delta u dy$$

bei der hier vorkommenden Art von Integration an und für ſich verſchwindet, ſo daß man hat:

$$\iint \Phi \left(\frac{d\delta u}{dx}\right) dx dy = \int \Phi \delta u dy - \iint \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) \delta u dx dy = -\iint \left(\frac{d\Phi}{dz}\right) \delta u dx dy.$$

welche von einer Formänderung der Functionen φ und ψ herrühren, und ſetzt für Y, Φ, Θ, Ψ, Ω ihre Werthe; ſo erhält man endlich für die geſuchte Totalvariation:

$$\delta.\iiint V dx dy dz = \iint V \delta z k dx dy - \iint V \delta z k' dx dy$$

$$+\iint (V_z - pV_x - qV_y - \frac{dV_{x^2}}{dz} + 2p\frac{dV_{xz}}{dx} + 2q\frac{dV_{yz}}{dy} + p^2\frac{dV_{xz}}{dz} + q^2\frac{dV_{yz}}{dz}$$

$$+ q\frac{dV_{xy}}{dx} + p\frac{dV_{xy}}{dy} + pq\frac{dV_{xy}}{dz} - \frac{dV_{xz}}{dx}\frac{dV_{yz}}{dy}$$

$$+ V_{x^2}r + V_{xy}s + V_{y^2}t)\,\delta u k dx dy \qquad \text{(D)}$$

$$+\iint (V_{z^2} + p^2 V_{x^2} + q^2 V_{y^2} - pV_{xz} - qV_{yz} + pqV_{xy})\frac{d\delta u}{dz} k dx dy$$

$$-\iint (V_z - \&c.)\,\delta u k' dx dy$$

$$-\iint (V_{z^2} + \&c.)\frac{d\delta u}{dz} k' dx dy$$

$$+\iiint \Big(U - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} - \frac{dV_z}{dz}$$

$$+\frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{xz}}{dxdz} + \frac{d^2V_{yz}}{dydz}\Big)\,\delta u dx dy dz.$$

Siebentes Kapitel.

Maxima und Minima der Functionen mit zwei und mehr independenten Veränderlichen.

110. Das hier anzuwendende allgemeine Verfahren ist dem früher bei Functionen einer Independenten angewandten ganz analog — d. h. wenn U eine Function von beliebig vielen independenten Veränderlichen ist; so muß für ein Maximum, oder Minimum:

$$DU = 0$$

und DU negativ, oder positiv sein — und zwar ohne irgend eine Beschränkung der Variationen der verschiedenen veränderlichen Elemente, die jedoch ausgenommen, welche in den Bedingungen der Aufgabe selbst liegen. —

Wir wollen bei der folgenden Untersuchung zunächst annehmen: daß zwei Grenzfunctionen gegeben sind, d. h. daß nach den Bedingungen der Aufgabe das betrachtete doppelte Integral auf alle Wertheſysteme von x und y erstreckt werden soll, welche den Ungleichheiten:

$$\psi(x, y) > 0, \quad \varphi(x, y) < 0$$

genügen — oder in dem Falle eines dreifachen Integrales, auf alle Wertheſysteme von x, y und z, welche den Ungleichheiten:

$$\psi(x, y, z) > 0, \quad \varphi(x, y, z) < 0$$

Genüge leisten. — Hierauf werden wir den Fall betrachten, wo nur eine Grenzfunction $\varphi(x, y)$ gegeben ist, d. h. wo das ursprüngliche Integral auf alle Wertheſysteme ausgedehnt werden muß, welche der einen Ungleichheit:

$$\varphi(x, y) < 0, \text{ oder } \varphi(x, y, z) < 0$$

genügen.

Aufgabe 1.

111. Die Function z so zu bestimmen, daß das Integral:

$$\iint V dx dy,$$

worin:

$$V = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

ist, ein Maximum, oder Minimum wird. —

Aufl. Nach dem im vorhergehenden Kapitel für die Totalvariation eines doppelten Integrales gefundenen Ausdrucke wird die Gleichung:

$$DU = 0$$

jetzt:

$$\int\Big\{V\delta y + \Big(V_y - \frac{dy}{dx}V_x + 2\frac{dy}{dx}\frac{dV_{x^2}}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2}\frac{dV_{x^2}}{dy} - \frac{dV_{y^2}}{dy} - \frac{dV_{xy}}{dx} + V_{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}\Big)\delta z$$
$$+ \Big(V_{x^2}\frac{dy^2}{dx^2} - V_{xy}\frac{dy}{dx} + V_{y^2}\Big)\frac{d\delta z}{dy}\Big\}kdx \qquad \text{(A)}$$
$$-\int\Big\{V\delta\dot{y} + (V_y - \&c.)\delta z + \Big(V_{x^2}\frac{dy^2}{dx^2} - \&c.\Big)\frac{d\delta z}{dy}\Big\}k'dx$$
$$+\iint\Big(Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2}\Big)\delta z dx dy = 0.$$

Zunächst ist wieder zu bemerken: daß in dieser Gleichung, wie in dem entsprechenden Falle eines einfachen Integrales, zwei wesentlich verschiedene Arten von Gliedern vorkommen — nämlich: 1) eine Anzahl von theilweise integrirten Gliedern, deren Werth von der Form der Functionen δy, δz abhängt; aber nicht im Allgemeinen, sondern nur für solche Werthe von x und y, welche der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0, \text{ oder } \psi(x, y) = 0$$

genügen — und: 2) eine Anzahl von Gliedern, welche gar nicht integrirt sind, und deren Werth nicht bestimmt werden kann, ohne die allgemeine Form der Function δz zu fixiren. —

Wie bei einem einfachen Integrale erhellet dann: daß der Gleichung (A) nur genügt werden kann, wenn man diese beiden Arten von Gliedern einzeln $= 0$ setzt — und wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$\alpha = V_y - V_x \frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dV_{x^2}}{dx} + \&c.,$$

$$\beta = V_{x^2}\frac{dy^2}{dx^2} - V_{xy}\frac{dy}{dx} + V_{y^2},$$

$$\Omega = Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \&c.;$$

ſo hat man zunächſt die drei Gleichungen:

$$\int\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)k'dx = 0,$$

$$\int\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)kdx = 0, \qquad (B)$$

$$\iint\Omega\delta z dx dy = 0.$$

Dieſen Gleichungen kann aber ohne Beſchränkung der völligen Allgemeinheit der Variationen δy, δz nicht anders Genüge geleiſtet werden, als wenn man die unter dem Integralzeichen ſtehenden Größen $= 0$ ſetzt, ſo daß man die Gleichungen erhält:

$$\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)_0 = 0,$$

$$\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)_1 = 0, \qquad (C)$$

$$\Omega = 0,$$

wovon ſich die erſte auf die Grenzfunction ψ und die zweite auf die Grenzfunction φ bezieht. — Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß die Gleichung:

$$\Omega = 0,$$

welches offenbar eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung iſt, eine Auflöſung geſtattet, worin die Größe unter dem Functionalzeichen für alle darin vorkommenden arbiträren Functionen dieſelbe iſt.*) — Die Anzahl dieſer Functionen iſt in dem gegenwär-

*) Wegen des Mangels der vollkommenen Analogie zwiſchen den in dem Integrale einer partiellen Differentialgleichung vorkommenden arbiträ-

tigen Falle $= 4$, und wenn die Auflöſung eine beſtimmte ſein ſoll; ſo müſſen ſich dieſe arbiträren Functionen auf irgend eine Weiſe beſtimmen laſſen. — Wir wollen deshalb nun zeigen: daß die beiden erſten der Gleichungen (C) die Mittel dazu an die Hand geben, und zu dem Zwecke, wie in dem Falle eines einfachen Integrales, die verſchiedenen Fälle unterſuchen, welche aus der Beſchaffenheit der Data in jedem beſondern Falle entſpringen können. — Ehe wir aber in dieſe Unterſuchung eingehen, wollen wir den folgenden Satz mittheilen, welcher bei der Anwendung der Gleichung (A) von weſentlichem Nutzen iſt, und deſſen Wahrheit offenbar aus den erſten Principien unſerer Wiſſenſchaft folgt.

„Wenn in dem allgemeinen Ausdrucke der Variation eines vielfachen Integrales ein Glied von der Form:

$$\iint \ldots U\delta u dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

vorkommt, und die Bedingungen der Aufgabe ſo beſchaffen ſind, daß ſie u zu einer beſtimmten Function von x_1, x_2, … x_n machen; ſo verſchwindet dieſes Glied an und für ſich — und wenn in demſelben Ausdrucke zwei Glieder von der Form:

$$\iint \ldots U\delta u dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

und:

$$\iint \ldots U'\delta u' dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

vorkommen, und die Bedingungen der Aufgabe ſo beſchaffen ſind, daß ſie u zu einer beſtimmten Function von x_1, x_2, … x_n und u' machen; ſo laſſen ſich dieſe beiden Glieder auf eins reduciren.“ —

Der erſte Theil dieſes Satzes iſt von ſelbſt einleuchtend; denn wenn u eine beſtimmte Function von x_1, x_2, … x_n wird, ſo iſt nach der Bedeutung des Zeichens δ klar, daß $\delta u = 0$ iſt. — Die Wahrheit des zweiten Theiles iſt ebenfalls einleuchtend; denn wenn:

$$u = f(x_1, x_2 \ldots u')$$

iſt, ſo iſt offenbar (Nr. 7, (5)):

---

ren Functionen mit den arbiträren Conſtanten in dem Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung iſt dieſe Unterſuchung weniger genügend, als die in Kap. III.

$$\delta u = \frac{df}{du'}\delta u',$$

und mithin lassen sich die beiden erwähnten Glieder auf das eine:

$$\iint \ldots \left(U\frac{df}{du'} + U'\right)\delta u' dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

reduciren. —

112. Wir wollen nun den obigen Satz auf die verschiedenen in der Anwendung vorkommenden Fälle anwenden. —

(1). Die Grenzfunction φ sei eine gegebene, bestimmte Function von x und y, so ist auch das aus der Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

abgeleitete y eine bestimmte Function von x, also $\delta y = 0$. Da die übrigen Variationen:

$$\delta z, \frac{d\delta z}{dy}, \text{ oder } \delta z, \delta q$$

willkürlich bleiben, so kann der ersten der Gleichungen (C) nur genügt werden, wenn man die Coefficienten dieser Variationen $= 0$ setzt. — Es muß also an jeder Integrationsgrenze sein:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0;$$

d. h. die erste der Gleichungen (C) ist gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen:

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

und ebenso ist wegen der andern Grenzfunction:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

Diese Gleichungen sind in Verbindung mit den Gleichungen:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

hinreichend zur Bestimmung der in dem Integeale der Gleichung:

$$\Omega = 0$$

vorkommenden vier willkürlichen Functionen. — Da die Größe unter

dem Functionszeichen in allen dieſen arbiträren Functionen nach der Vorausſetzung dieſelbe iſt, ſo iſt das Integral der Gleichung:

$$\Omega = 0$$

offenbar:

$$F(x, y, z, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0,$$

wo v eine beſtimmte Function von x, y, z und für alle vier arbiträre Functionen dieſelbe iſt. — Es ſei z. B.:

$$v = ax + by + cz,$$

ſo hat man die Gleichungen:

$$v = ax + by + cz,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$a_0 = 0,$$
$$F\{x, y, z, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0,$$

und wenn man x, y, z zwiſchen dieſen Gleichungen eliminirt; ſo erhält man offenbar ein Reſultat von der Form:

$$F_1\{v, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0. \qquad (1)$$

Verfährt man mit den übrigen Gleichungen:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 0$$

ebenſo, ſo erhält man offenbar drei ähnliche Gleichungen:

$$F_2\{v, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0, \qquad (2)$$
$$F_3\{v, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0, \qquad (3)$$
$$F_4\{v, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0. \qquad (4)$$

Dieſe vier Gleichungen (1), (2), (3), (4) beſtimmen die vier willkürlichen Functionen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 als Functionen von v. — Subſtituirt man die ſo gefundenen Ausdrücke in die Gleichung:

$$F\{(x, y, z, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0,$$

und ſetzt für v ſeinen Werth:

$$ax + by + cz;$$

ſo erhält man eine Gleichung ohne arbiträre Functionen von der Form:

$$f(x, y, z) = 0,$$

welche eine vollſtändige Auflöſung der Aufgabe gibt. — Wenn die Größe unter dem Functionalzeichen nicht dieſelbe iſt in allen arbiträren Functionen, ſo bietet die Beſtimmung der letztern im Allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten dar. —

(2). Wir wollen nun annehmen, daß die Grenzwerthe von z ebenfalls als Functionen von x gegeben ſind, oder mit andern Worten: die Grenzwerthe von x, y, z ſeien durch die beſtimmten Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0 \tag{D}$$

verknüpft; ſo ſind z und y beide beſtimmte Functionen von x, alſo $\delta z = 0$, $\delta y = 0$, und die durch:

$$\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)_0 = 0$$

gelieferten Gleichungen reduciren ſich auf die eine:

$$\beta_0 = 0.$$

Nimmt man wieder an, daß die Größe in den arbiträren Functionen dieſelbe iſt, und eliminirt x, y, z zwiſchen dieſer letzten Gleichung und den Gleichungen:

$$v = ax + by + cz,$$
$$f(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0,$$
$$F\{x, y, z, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} = 0;$$

ſo erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} F_1\{v, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v)\} &= 0, \\ F_2\{v, \varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v) \quad \varphi_4(v)\} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{E}$$

Da ferner die Gleichung:

$$\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)_1 = 0$$

zwei ähnliche Gleichungen liefert, so ist klar, daß die in dem allgemeinen Integrale der partiellen Differentialgleichung vorkommenden willkürlichen Functionen wieder vollständig bestimmt sind. —

(3). Wenn der Grenzwerth jedes der Differentialquotienten:

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dx}$$

gegeben ist,*) so verschwindet offenbar die Gleichung:

$$\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)_0 = 0$$

von selbst, und man hat außer den Gleichungen (D) zur Bestimmung der arbiträren Functionen noch eine andere Gleichung, welche sich durch Differentiation des allgemeinen Integrales nach x oder y und Substitution des gegebenen Grenzwerthes von:

$$\frac{dz}{dx}, \text{ oder } \frac{dz}{dy}$$

ergibt. — Die Anzahl der Hülfsgleichungen bleibt also wieder dieselbe wie früher.

(4). Die Grenzfunction $\varphi(x, y)$ sei eine unbekannte Function, deren Form durch die Elimination von z zwischen dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

---

*) Wenn eine dieser Größen gegeben ist, so ist offenbar auch die andere gegeben. Denn da nach der Voraussetzung die Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0$$

für alle Grenzwerthe von x und y stattfinden, so hat man:

$$\left\{\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right\}_0 = 0,$$

$$\left\{\frac{df'}{dx} + \frac{df'}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{df'}{dy} + \frac{df'}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right\}_0 = 0.$$

Eliminirt man $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ und substituirt den gegebenen Werth einer der Größen $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0$ oder $\left(\frac{dz}{dy}\right)_0$, so erhält man die andere. —

$$\Omega = 0$$

und der bestimmten Gleichung:

$$z = f(x, y)$$

zu bestimmen ist. — In diesem Falle verschwindet kein Glied der Gleichungen (C); aber da die Grenzwerthe von x, y und z durch eine bestimmte Gleichung verknüpft sind, so erhellet aus dem zweiten Theile des obigen allgemeinen Satzes, daß sich die Glieder mit ihren Variationen in eins vereinigen lassen. — In der That, bezeichnen wir das Integral der Gleichung $\Omega = 0$ durch $z = \chi(x, y)$, so haben wir:

$$f(x, y) = \chi(x, y),$$

und wenn wir von jeder Seite dieser Gleichung die Totalvariation nehmen:

$$\frac{df}{dy}\delta y = \frac{d\chi}{dy}\delta y + \delta\chi = \frac{d\chi}{dy}\delta y + \delta z,$$

oder wenn wir $\frac{df}{dy}$, $\frac{d\chi}{dy}$ resp. mit q', q bezeichnen:

$$q'\delta y = q\delta y + \delta z,$$

und folglich:

$$\delta z = (q' - q)\,\delta y.$$

In diesem Falle ist also die Gleichung:

$$\left(V\delta y + \alpha\delta z + \beta\frac{d\delta z}{dy}\right)_0 = 0$$

gleichbedeutend mit:

$$V_0 + \alpha_0(q' - q) = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

welche in Verbindung mit der Gleichung:

$$z = f(x, y)$$

zwei Relationen zwischen den in dem allgemeinen Integrale vorkommenden arbiträren Functionen liefern. — Die andern werden ebenso durch die Bedingungen in Bezug auf die zweite Grenze gegeben — und überhaupt erhellet wie in dem Falle eines einfachen Integrales, daß, wenn wegen irgend einer Bedingung die Anzahl der durch (C) gelieferten Gleichungen vermindert wird, indem Glieder verschwin-

den, oder sich in eins vereinigen, man zu gleicher Zeit eben so viele neue Gleichungen erhält, welche diesen Mangel ersetzen. —

113. Aus der vorhergehenden Untersuchung erhellet also: daß in dem betrachteten Falle zweier Grenzfunctionen die Aufgabe im Allgemeinen möglich und bestimmt ist, indem die Anzahl der Hülfsgleichungen eben so groß ist, als die der arbiträren Functionen, welche in der allgemeinen Auflösung vorkommen. — Es bleibt jedoch noch ein sehr wichtiger Fall zu betrachten übrig, nämlich der, wo nur eine Grenzfunction gegeben ist, oder wo das betrachtete Integral auf alle Werthesysteme von x, y erstreckt werden soll, welche der Bedingung:

$$\varphi(x, y) < 0$$

genügen. — Da die Anzahl der Gleichungen, durch welche die arbiträren Functionen bestimmt werden, in diesem Falle sich auf die Hälfte reducirt; so ist zu erwarten, daß die Aufgabe im Allgemeinen unbestimmt sein wird, kann aber in gewissen Fällen durch die folgende Betrachtung wieder zu einer bestimmten gemacht werden. — Bei dem Processe der bestimmten Integration ist es eine durchaus wesentliche Bedingung: daß das Element des Integrales, d. h. jede der Größen, von deren Summe das Integral die Grenze ist, innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich wird. — Demnach muß man, nachdem die in dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$\Omega = 0$$

vorkommenden willkürlichen Functionen möglicherweise bestimmt sind, aus dem Resultate jede Auflösung verwerfen, welche das Element des Integrales für irgend welches zwischen den Integrations-Grenzen liegendes Werthesystem von x und y unendlich macht — und wenn diese Bedingung irgend eine der arbiträren Functionen noch unbestimmt läßt; so darf man schließen: daß die Aufgabe ihrer Natur nach ebenfalls unbestimmt ist. —

114. Die obige Theorie unterliegt natürlich ähnlichen Ausnahmen, wie die, welche wir bei der Anwendung der Variationsrechnung auf einfache Integrale gefunden haben — und die bemerkenswertheste derselben ist von ähnlicher Art, wie die in Nr. 28, (1) angeführte, welche daher rührt: daß in gewissen Fällen die Differentialgleichung von einer niedrigern, als von der $2n$ten Ordnung ist,

ihr Integral alſo nicht eine hinreichende Anzahl willkürlicher Conſtanten enthält, um den Bedingungen genügen zu können, welche die außerhalb des Integralzeichens ſtehenden Glieder liefern. —

Aehnlich verhält es ſich bei einem Doppelintegrale, wenn die partielle Differentialgleichung:

$$\Omega = 0$$

von einer niedrigern Ordnung iſt, als die des höchſten in V enthaltenen Differentialquotienten doppelt genommen; alſo ihr Integral im Allgemeinen nicht die hinreichende Anzahl arbiträrer Functionen enthält, um den Bedingungen genügen zu können, welche die nur mit einem Integralzeichen behafteten Glieder geben. — Um alſo die Bedingungen eines ſolchen Ausnahmefalles kennen zu lernen, muß man unterſuchen, in welchen Fällen die Glieder von der höchſten Ordnung aus der Gleichung:

$$\Omega = 0$$

verſchwinden. — Beſchränken wir uns für den Augenblick auf die Betrachtung des Falles, wo V keine Differentialquotienten von einer höhern, als von der zweiten Ordnung enthält; ſo haben wir:

$$\Omega = Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} + \frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2},$$

wo die Differentialquotienten von der höchſten, d. h. von der vierten Ordnung, offenbar nur in den drei letzten Gliedern vorkommen. — Setzen wir:

$$p = \frac{dz}{dx},\ q = \frac{dz}{dy},\ r = \frac{d^2z}{dx^2},\ s = \frac{d^2z}{dxdy},\ t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

und behalten nur die Glieder von der höchſten Ordnung bei; ſo haben wir:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} &= \frac{d^2V}{dr^2}\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{d^2V}{drds}\frac{d^4z}{dx^3dy} + \frac{d^2V}{drdt}\frac{d^4z}{dx^2dy^2},\\
\frac{d^2V_{xy}}{dxdy} &= \frac{d^2V}{drds}\frac{d^4z}{dx^3dy} + \frac{d^2V}{ds^2}\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^2V}{dsdt}\frac{d^4z}{dxdy^3}, \qquad (F)\\
\frac{d^2V_{y^2}}{dy^2} &= \frac{d^2V}{drdt}\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^2V}{dsdt}\frac{d^4z}{dxdy^3} + \frac{d^2V}{dt^2}\frac{d^4z}{dy^4}.
\end{aligned}$$

Sollen nun die Glieder von der höchsten Ordnung aus Ω verſchwinden, ſo müſſen offenbar die Coefficienten der verſchiedenen Größen:

$$\frac{d^4z}{dx^4},\ \frac{d^4z}{dx^3dy},\ \frac{d^4z}{dx^2dy^2},\ \frac{d^4z}{dxdy^3},\ \frac{d^4z}{dy^4}$$

an und für ſich verſchwinden. — Addiren wir alſo die Gleichungen (F) und ſetzen die Coefficienten dieſer Größen einzeln = 0, ſo erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{d^2V}{dr^2}=0,\ \frac{d^2V}{drds}=0,\ \frac{d^2V}{ds^2}+2\frac{d^2V}{drdt}=0,\ \frac{d^2V}{dsdt}=0,\ \frac{d^2V}{dt^2}=0.$$

Durch Integration der beiden erſten findet man:

$$V=rf(x,y,z,p,q,t)+F(x,y,z,p,q,s,t),$$

und ebenſo aus den beiden letzten:

$$V=tf'(x,y,z,p,q,r)+F'(x,y,z,p,q,s,r).$$

Sollen dieſe beiden Ausdrücke identiſch ſein, ſo muß man offenbar haben:

$$V=Art+Br+Dt+F+\varphi(s,p,q,x,y,z), \qquad (G)$$

wo A, B, D, F Functionen von x, y, z, p, q ſind. — Wir haben alſo:

$$\frac{d^2V}{drdt}=A,\ \frac{d^2V}{ds^2}=\frac{d^2\varphi}{ds^2},$$

und wenn dieſe Werthe in die Gleichung:

$$\frac{d^2V}{ds^2}+2\frac{d^2V}{drdt}=0$$

ſubſtituirt werden; ſo ergiebt ſich:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}=-2A;$$

folglich:

$$\varphi=-As^2+2Cs+C',$$

und endlich, wenn dieſer Werth in die Gleichung (G) ſubſtituirt wird:

$$V=A(rt-s^2)+Br+2Cs+Dt+E. \qquad (H)$$

Wenn alſo V dieſe Form hat, ſo kann die Gleichung:

$$\Omega = 0$$

von keiner höhern, als von der dritten Ordnung ſein — und wir wollen jetzt zeigen: daß ſie von keiner höhern, als von der zweiten Ordnung ſein kann — d. h. wenn die Glieder von der vierten Ordnung verſchwinden, ſo verſchwinden die von der dritten Ordnung ebenfalls. — Aus der Gleichung (H) folgt nämlich:

$$V_{x^2} = At + B, \quad V_{xy} = -2As + 2C, \quad V_{y^2} = Ar + D,$$

$$V_x = (rt - s^2)\frac{dA}{dp} + r\frac{dB}{dp} + 2s\frac{dC}{dp} + t\frac{dD}{dp},$$

$$V_y = (rt - s^2)\frac{dA}{dq} + r\frac{dB}{dq} + 2s\frac{dC}{dq} + t\frac{dD}{dq},$$

wenn das Glied E, welches offenbar keinen höhern Differentialquotienten, als von der zweiten Ordnung geben würde, hinweggelaſſen wird. — Hieraus ergibt ſich durch Differentiation:

$$\frac{dV_{x^2}}{dx} = A\frac{dt}{dx} + t\left(r\frac{dA}{dp} + s\frac{dA}{dq} + p\frac{dA}{dz} + \frac{dA}{dx}\right)$$

$$+ r\frac{dB}{dp} + s\frac{dB}{dq} + p\frac{dB}{dz} + \frac{dB}{dx},$$

und ebenſo:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} = -A\frac{ds}{dy} - s\left(s\frac{dA}{dp} + t\frac{dA}{dq} + q\frac{dA}{dz} + \frac{dA}{dy}\right)$$

$$+ s\frac{dC}{dp} + t\frac{dC}{dq} + q\frac{dC}{dz} + \frac{dC}{dy}.$$

Wenn alſo die Glieder von einer niedrigern, als von der zweiten Ordnung hinweggelaſſen werden, ſo hat man:

$$\frac{dV_{x^2}}{dx} + \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} - V_x$$

$$= t\left(\frac{dC}{dq} - \frac{dD}{dp} + \frac{dA}{dx} + p\frac{dA}{dz}\right) + s\left(\frac{dB}{dq} - \frac{dC}{dp} - \frac{dA}{dy} - q\frac{dA}{dz}\right)$$

$$= mt - ns,$$

und ebenso:

$$\frac{dV_{y^2}}{dy} + \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx} - V_y$$

$$= r\left(\frac{dC}{dp} - \frac{dB}{dq} + \frac{dA}{dy} + q\frac{dA}{dz}\right) + s\left(\frac{dD}{dp} - \frac{dC}{dq} - \frac{dA}{dx} - p\frac{dC}{dz}\right)$$

$$= nr - ms.$$

Aus:

$$\mathfrak{Q} = Z + \frac{d}{dx}\left(\frac{dV_{x^2}}{dx} + \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy} - V_x\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{dV_{y^2}}{dy} + \tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx} - V_y\right)$$

$$= Z + \frac{d}{dx}(mt - ns) + \frac{d}{dy}(nr - ms)$$

erhellet aber, daß, wenn die Differentiationen wirklich ausgeführt werden, alle Glieder von der dritten Ordnung aus $\mathfrak{Q}$ verschwinden.

Das Vorhergehende läßt sich leicht auf den allgemeinen Fall ausdehnen, wo V Differentialquotienten der Function z irgend welcher Ordnung enthält, und das Resultat kann im Allgemeinen folgendermaßen dargestellt werden:

Wenn V eine Function von x, y, z und den Differentialquotienten von z bis zur $n$ten Ordnung ist; so ist:

$$\mathfrak{Q} = 0$$

im Allgemeinen eine partielle Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung, welche sich jedoch durch Verschwindenmachen der Glieder mit den Differentialquotienten der beiden höchsten Ordnungen auf eine Gleichung von der $(2n-2)$ten Ordnung bringen läßt, wenn, aber auch nur wenn, V eine Function von:

$$\frac{d^n z}{dx^n},\ \frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} \cdots \frac{d^n z}{dy_n}$$

von keinem höhern, als vom zweiten Grade ist, worin die Coefficienten der Glieder vom zweiten Grade durch die Bedingung verknüpft sind: daß die Summe der Coefficienten aller Glieder wie:

$$\left(\frac{d^n z}{dx^{n-1}.dy}\right)^2,\ \frac{d^n z}{dx^{n-2}.dy^2}\cdot\frac{d^n z}{dx^n},$$

worin die Summe der Exponenten von dx und dy dieselbe $(=2n)$ ist, $=0$ sein muß. — Wenn z. B. A der Coefficient von:

$$\left(\frac{d^n z}{dx^{n-4}.dy^4}\right)^2$$

ist, und B, C, D sind resp. die Coefficienten der Glieder:

$$\frac{d^n z}{dx^{n-7}.dy^7}\cdot\ \frac{d^n z}{dx^{n-1}.dy}\ ,\ \frac{d^n z}{dx^{n-6}.dy^6}\cdot\ \frac{d^n z}{dx^{n-2}.dy^2}\ ,\ \frac{d^n z}{dx^{n-5}.dy^5}\cdot\ \frac{d^n z}{dx^{n-3}.dy^3};$$

so muß sein:

$$A+B+C+D=0.$$

115. Wir müssen hier noch auf einen wesentlichen Unterschied zwischen dem jetzt betrachteten Ausnahmefalle und dem bei einfachen Integralen erörterten aufmerksam machen. — Wie wir früher gesehen haben, lag der Grund einer solchen Ausnahme bei einem einfachen Integrale darin: daß dasselbe nicht schon vor der Anwendung der Variationsrechnung auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht war. — Denn wenn V eine lineare Function des höchsten darin vorkommenden Differentialquotienten ist, so haben wir gesehen (S. 54), daß:

$$\int V dx = \varphi + \int \varphi' dx$$

ist, wo in φ kein Differentialquotient von einer höhern, als der $(n-1)$ten Ordnung vorkommt. —

Eine solche Reduction ist aber in dem vorliegenden Falle nicht ausführbar. — Denn setzt man:

$$\iint V dx dy = \varphi + \iint \varphi' dx dy, \qquad (I)$$

wo φ nur einfache Integrale enthält und sich blos auf die Integrationsgrenzen bezieht, und man nimmt von beiden Seiten dieser Gleichung nach den frühern Regeln die Variation; so ist klar: daß der Coefficient von δz unter dem doppelten Integralzeichen auf beiden Seiten derselbe sein muß. — Wenn nun V von der zweiten Ordnung ist, so ist φ' von der ersten, und folglich ist in seiner Variation der Coefficient von δz unter dem doppelten Integralzeichen eine lineare Function von r, s, t. Hieraus sieht man, daß die Annahme (I) unzulässig ist, wenn Ω diese Größen in einer höhern, als in der ersten Potenz enthält. —

Wenn aber V von der Form (H) ist, so ist leicht ersichtlich, daß Ω im Allgemeinen ein Glied von der Form:

enthalten wird, und folglich ist die Reduction des betrachteten Doppelintegrales auf ein einfaches im Allgemeinen unmöglich.

Beispiel 1.

116. Man soll die Form der Function z so bestimmen, daß das doppelte Integral:

$$\iint (px + qy - z)^m dx dy$$

ein Maximum, oder ein Minimum wird.

Hier ist:

$$Z = -m(px + qy - z)^{m-1},$$

$$V_x = m(px + qy - z)^{m-1}x,$$

$$V_y = m(px + qy - z)^{m-1}y,$$

$$V_{x^2} = 0, \quad V_{xy} = 0, \quad V_{y^2} = 0,$$

$$\frac{dV_x}{dx} = m(px+qy-z)^{m-1} + m.m-1\,(px+qy-z)^{m-2}(rx^2+sxy),$$

$$\frac{dV_y}{dy} = m(px+qy-z)^{m-1} + m.m-1\,(px+qy-z)^{m-2}(sxy+ty^2)$$

und wenn diese Werthe in die Gleichung:

$$\Omega = 0$$

substituirt werden; so erhält man:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + \frac{3}{m-1}(px + qy - z) = 0. \qquad (a)$$

Um diese letzte Gleichung zu integriren, setze man:

$$u = px + qy - z,$$

so ergibt sich daraus:

$$\frac{du}{dx} = rx + sy, \quad \frac{du}{dy} = sx + ty;$$

folglich:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth, ſo wie die von $px + qy - z$ in die Gleichung (a), und ſetzt n für $\frac{3}{1-m}$; ſo findet man:

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} - nu = 0.$$

Wenn man dieſe partielle Differentialgleichung erſter Ordnung auf die gewöhnliche Weiſe integrirt, ſo bekommt man:

$$u = x^n F\left(\frac{y}{x}\right),$$

oder wenn man für u ſeinen Werth $px + qy - z$ ſetzt:

$$px + qy - z = x^n F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dies iſt wieder eine partielle Differentialgleichung erſter Ordnung, welche durch das gewöhnliche Verfahren integrirt werden kann, ſo daß man mithin als vollſtändiges Integral der Gleichung (a) erhält:

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + x^n F\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \text{(b)}$$

Wir wollen nun die in dieſer Auflöſung enthaltenen arbiträren Functionen nach den vorkommenden verſchiedenen Daten der Aufgabe beſtimmen. —

(1). Wir nehmen zunächſt an, daß die Formen der Grenzfunctionen φ, ψ gegeben ſind, ſo daß z. B. die Integrationsgrenzen ſo genommen werden ſollen, daß das Integral die Grenze der Summe der Elemente:

$$(px + qy - z)^m dx dy$$

für alle Wertheſyſteme von x und y ausdrückt, für welche die Functionen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2,$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c'^2$$

verſchiedene Zeichen bekommen. — Alsdann iſt $\delta y = 0$, und die erſte der Gleichungen (C) wird:

$$V_y - V_x \frac{dy}{dx} = 0, \qquad \text{(c)}$$

oder wenn für V_y, V_x ihre Werthe und für $\frac{dy}{dx}$ sein aus einer der Gleichungen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2-c'^2=0$$

abgeleiteter Werth substituirt werden:

$$m(px+qy-z)^{m-1}\left(y+\frac{x.x-a}{y-b}\right)=0,$$

welche Gleichung für jede Integrationsgrenze stattfinden muß. — Dieser Gleichung wird genügt, wenn man entweder setzt:

$$px+qy-z=0,$$

oder:

$$y+\frac{x.x-a}{y-b}=0. \qquad (\mu)$$

Hinsichtlich der letzten Annahme ist zu bemerken, daß die Gleichung (c) nach der Voraussetzung unabhängig von x stattfinden muß, und daß y blos einen der beiden Werthe:

$$b\pm\sqrt{\{c^2-(x-a)^2\}}$$

haben muß, so daß durch (μ) zwischen x und y eine zweite Gleichung aufgestellt würde, was unzulässig ist. — Diese Voraussetzung unbeachtet gelassen, betrachten wir also blos die erste:

$$px+qy-z=0.$$

Wenn wir für p und q ihre aus der Gleichung (b) gezogenen Werthe substituiren, so ergibt sich, daß die Gleichung:

$$px+qy-z=0$$

gleichbedeutend ist mit:

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

Diese Bedingungsgleichung reducirt die Gleichung (b) auf:

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

was allgemein geben würde:

$$px + qy - z = 0,$$

und mithin:

$$V = 0.$$

Es ist aber leicht einzusehen, daß dieses Resultat nicht von der gewählten besondern Form der Grenzfunction, sondern blos davon abhängt, daß sie nur eine Function von x und y ist. — Wenn also die Form der Grenzfunction gegeben ist, aber die Grenzwerthe von z unbestimmt bleiben; so gestattet das gegebene bestimmte Integral weder ein Maximum, noch ein Minimum. —

(2). Wir wollen nun annehmen, daß auch die Grenzwerthe von z gegeben sind, indem z. B. die Integrationsgrenzen so genommen werden: daß das bestimmte Integral die Summe der Elemente für alle Werthe von x und y ausdrückt, für welche die Functionen:

$$x^2 + y^2 - a^2, \quad x^2 + y^2 - a'^2$$

verschiedene Zeichen bekommen; ferner: daß für alle Werthe von x und y, für welche die erste dieser Functionen verschwindet, z den constanten Werth c bekommt, und endlich: daß für alle Werthe von x und y, für welche die zweite Function verschwindet, z den constanten Werth c' erhält. — Setzen wir $t = \frac{y}{x}$, so haben wir für das erste System die Gleichungen:

$$z = xf(t) + x^n F(t)$$
$$z = c, \quad y = tx,$$
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

woraus sich durch Elimination von x, y, z ergibt:

$$c = \frac{a}{\sqrt{(1+t^2)}} f(t) + \left(\frac{a}{\sqrt{(1+t^2)}}\right)^n F(t).$$

Aus den Gleichungen:

$$z = xf(t) + x^n F(t), \quad y = tx,$$
$$z = c', \quad x^2 + y^2 = a'^2$$

findet man ebenso:

$$c' = \frac{a'}{\sqrt{(1+t^2)}} f(t) + \left(\frac{a'}{\sqrt{(1+t^2)}}\right)^n F(t).$$

Löſen wir dieſe Gleichungen für $f(t)$ und $F(t)$ auf, ſo erhalten wir:

$$f(t) = \frac{ca'^n - c'a^n}{aa'^n - a'a^n} \sqrt{(1+t^2)},$$

$$F(t) = \frac{c'a - ca}{aa'^n - a'a^n} (1+t^2)^{\frac{n}{2}}.$$

Subſtituiren wir dieſe Werthe in die Gleichung:

$$z = xf(t) + x^n F(t),$$

und ſetzen für t ſeinen Werth $\frac{y}{x}$; ſo erhalten wir endlich:

$$(aa'^n - a'a^n)z = (ca'^n - c'a^n)\sqrt{(y^2+x^2)} + (c'a - ca')(y^2+x^2)^{\frac{n}{2}}. \quad \text{(a)}$$

Betrachten wir jetzt den Fall, wo nur eine Grenzfunction vorhanden iſt, und es ſei z. B. nach den Bedingungen der Aufgabe das gegebene Integral auf alle Werthesyſteme von x und y zu erſtrecken, welche die Function:

$$x^2 + y^2 - a^2$$

negativ machen.

Setzt man für n ſeinen Werth $\frac{3}{1-m}$; ſo wird die allgemeine Auflöſung (b):

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + x^{\frac{3}{1-m}} F\left(\frac{y}{x}\right),$$

und wenn man nach dieſer Gleichung den Werth von:

$$V = (px + qy - z)^m$$

bildet; ſo findet man:

$$V = \left(\frac{2+m}{1-m}\right)^m x^{\frac{3m}{1-m}} \left\{ F\left(\frac{y}{x}\right) \right\}^m.$$

Nun muß aber nach dem früher Geſagten jede Auflöſung verworfen werden, welche dieſen Werth für irgend welche zwiſchen den

Integrationsgrenzen liegende Werthe von x und y unendlich macht. — Wenn also $\frac{3m}{1-m}$ negativ ist, d. h. wenn m zwischen $-\infty$ und 0, oder zwischen 1 und $+\infty$ liegt; so ist offenbar $V=\infty$ für $x=0$, $y=0$, wofern nicht $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$ ist für alle Werthe von $\frac{y}{x}$. — Wenn also in diesem Falle der Theil der allgemeinen Auflösung, worin $F\left(\frac{y}{x}\right)$ vorkommt, hinweggelassen wird; so wird die Gleichung (b):

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

und es ist leicht einzusehen, daß die Bedingung: es müsse $z=c$ sein, wenn $x^2+y^2-a^2=0$ ist, die letzte Gleichung auf:

$$az=c\sqrt{(y^2+x^2)}$$

reducirt. —

Wenn dagegen $\frac{3m}{1-m}$ positiv ist, d. h. m zwischen 0 und 1 liegt; so wird $x^{\frac{3m}{1-m}}$ für keinen zwischen den Integrationsgrenzen liegenden Werth von x unendlich, und man kann mithin für $F\left(\frac{y}{x}\right)$ jede beliebige Function setzen, welche zwischen diesen Grenzen nicht unendlich wird. — Nimmt man eine solche Function für $F\left(\frac{y}{x}\right)$, so wird die andere arbiträre Function $f\left(\frac{y}{x}\right)$ wieder durch die Bedingung bestimmt: daß $z=c$ sein muß für $x^2+y^2=a^2$. — Auf diese Weise erhält man das Resultat:

$$z=\frac{\sqrt{(y^2+x^2}}{a}\left\{c-\frac{a^n x^n}{(y^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}F\left(\frac{y}{x}\right)\right\}+x^n F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \text{(e)}$$

wenn n für $\frac{3}{1-m}$ gesetzt wird, und ist die einzige reelle endliche Auflösung. —

(3). Wenn V keinen höhern Differentialquotienten als von der ersten Ordnung enthält, so verschwindet das Glied mit δy von selbst

aus der ersten der Gleichungen (C). Der dritte Fall ist also hier nicht anwendbar. —

(4). Endlich wollen wir annehmen: daß die Form der Grenzfunctionen nicht direkt gegeben ist, sondern erst durch Elimination von z zwischen der Gleichung (a) und den Gleichungen:

$$z = ax + by + c,$$
$$z = a'x + b'y + c' \qquad (f)$$

bestimmt werden muß. — Die Gleichung:

$$\{V + a(q' - q)\}_0 = 0$$

oder:

$$\{V + V_x(p' - p) + V_y(q' - q)\}_0 = 0$$

auf S. 272 wird in diesem Falle durch Substitution der Werthe von V, V_x und V_y:

$$(px + qy - z)^m + m(px + qy - z)^{m-1}\{(p' - p)x + (q' - q)y\} = 0,$$

oder wenn der Factor:

$$(px + qy - z)^{m-1}$$

hinweggelassen wird:

$$(1 - m)(px + qy - z) + m(p'x + q'y - z) = 0.$$

Setzt man für p, q ihre aus der allgemeinen Auflösung (b) gezogenen Werthe, und für p', q' ihre aus der ersten der Gleichungen (f) abgeleiteten Werthe; so wird die letzte Gleichung:

$$(2 + m)x^n F\left(\frac{y}{x}\right) = mc.$$

Setzt man wieder $\frac{y}{x} = t$, so hat man:

$$z = xf(t) + x^n F(t),$$
$$z = (a + bt)x + c,$$
$$(m + 2)x^n F(t) = mc.$$

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$$u = f(t), \quad v = F(t)$$

und z, vx^n eliminirt; so findet man:

$$x = \frac{2c}{m+2}\,\frac{1}{u-a-bt}.$$

Substituirt man diesen Werth für x in die dritte der obigen Gleichungen, so bekommt man:

$$(u-a-bt)^n = \frac{2^n}{m}(m+2)^{1-n}c^{n-1}v.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich aus der zweiten der Gleichungen (f):

$$(u-a'-b't)^n = \frac{2^n}{m}(m+2)^{1-n}c'^{n-1}v.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht:

$$u = \frac{c'^{\frac{n-1}{n}}(a+bt) - c^{\frac{n-1}{n}}(a'+b't)}{c'^{\frac{n-1}{n}} - c^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$v = m(m+2)^{n-1}\left\{\frac{(a+bt)-(a'+b't)}{2\left(c'^{\frac{n-1}{n}} - c^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right\}^n,$$

und hieraus:

$$z = \frac{c'^{\frac{n-1}{n}}(ax+by) - c^{\frac{n-1}{n}}(a'x+b'y)}{c'^{\frac{n-1}{n}} - c^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$+ m(m+2)^{n-1}\left\{\frac{(ax+by)-(a'x+b'y)}{2\left(c'^{\frac{n-1}{n}} - c^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right\}^n.$$

Es ist nicht schwer einzusehen, daß diese Auflösung durch eine Coordinatenvertauschung auf die Form:

$$(x+y)^n = A^{n-1}z$$

gebracht werden kann. —

Für $n = -1$ wird die allgemeine Auflösung (b) unbrauchbar, weil sie alsdann nur eine arbiträre Function enthält. — Aber wenn man mit specieller Beziehung auf diesen Fall integrirt, so sieht man leicht ein, daß die wahre Auflösung folgende ist:

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + xlxF\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dieſer Fall entſpricht:

$$V = (px + qy - z)^{-2},$$

und es iſt mit keinen Schwierigkeiten verbunden, nach den Bedingungen der Aufgabe das vorhin gezeigte Verfahren zur Beſtimmung arbiträrer Functionen darauf anzuwenden. — Wenn die Grenzfunctionen ſind:

$$x^2 + y^2 - a^2, \quad x^2 + y^2 - a'^2$$

und c, c' die Grenzwerthe von z; ſo iſt das Reſultat von der Form:

$$Az = B\sqrt{(y^2 + x^2)}\,l\left(\frac{y^2 + x^2}{C^2}\right).$$

Beiſpiel 2.

117. Als eine allgemeinere Aufgabe dieſer Art ſei die Form der Function z ſo zu beſtimmen, daß das Integral:

$$\iint f(px + qy - z)\,dx\,dy,$$

worin f eine ganz beliebige Function bedeutet, ein Maximum, oder Minimum wird. —

Setzt man in dieſem Falle $u = px + qy - z$, ſo hat man:

$$Z = -f'(u), \quad V_x = xf'u, \quad V_y = yf'(u).$$

Die Gleichung:

$$\Omega = 0, \text{ oder } Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} = 0$$

wird mithin:

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + 3\frac{f'(u)}{f''(u)} = 0.$$

Wird dieſe Gleichung auf die gewöhnliche Weiſe integrirt, ſo findet man:

$$x^3 f'(u) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ oder } u = f'^{-1}\left\{\frac{1}{x^3} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\},$$

oder endlich, wenn für u ſein Werth geſetzt wird:

$$px + qy - z = f'^{-1}\left\{\frac{1}{x^3}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}.$$

Dieſe Gleichung, welche wie eine partielle Differentialgleichung erſter Ordnung integrirt werden kann, gibt:

$$z = x\psi\frac{y}{x} + xf'^{-1}\left(\frac{a}{x^3}\right)\frac{dx}{x^2}, \qquad \text{(a)}$$

worin nach der Integration in Bezug auf x für a noch ſein Werth:

$$a = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

geſetzt werden muß. —

Wenn das gegebene Integral wäre:

$$\iint l(px + qy - z)dxdy,$$

ſo wäre die Auflöſung, wie man leicht ſieht:

$$z = x^3\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \text{(b)}$$

Dieſes Reſultat iſt in der allgemeinen Auflöſung (b) auf S. 280 nicht enthalten; denn ſollte die letzte Gleichung (b) mit der allgemeinen Auflöſung:

$$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

identiſch ſein, ſo müßte nothwendig $n = 3$, alſo:

$$m = \frac{n-3}{n} = 0$$

ſein, was ein offenbar unzuläſſiger Werth iſt. —

Beiſpiel 3.

118. Wenn μ eine beliebige Function von x, y, z iſt, z ſo zu beſtimmen, daß das Integral:

$$\iint \mu(px + qy - z)\,dxdy$$

ein Maximum, oder ein Minimum wird. —

Hier iſt:

$$Z = (px + qy - z)\frac{d\mu}{dz} - \mu,$$

$$V_x = \mu x, \quad V_y = \mu y,$$

und die Gleichung:

$$\Omega = 0$$

wird folglich:

$$x\frac{d\mu}{dx} + y\frac{d\mu}{dy} + z\frac{d\mu}{dz} = -3\mu.$$

Wenn die gegebene Function μ eine homogene des n ten Grades wäre, ſo wäre dieſe Gleichung gleichbedeutend mit:

$$(n+3)\mu = 0,$$

und könnte alſo nur durch $\mu = 0$ erfüllt werden, wenn nicht $n = -3$ wäre, in welchem Falle die Gleichung eine identiſche wäre.*) —

Beiſpiel 4.

119. Für die Function z eine ſolche Form zu finden, daß das Integral:

$$\iint \sqrt{(p^2 + q^2)}\,dx\,dy$$

ein Maximum, oder ein Minimum wird. —

Hier iſt:

$$V_x = \frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}} \quad V_y = \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}},$$

und die Gleichung:

$$\Omega = 0$$

wird:

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0, \tag{a}$$

wovon das Integral bekanntlich iſt:

$$y = xfz + Fz. \tag{b}$$

(1). Zuerſt wollen wir annehmen, daß die Grenzfunctionen φ,

*) Wegen einer weiteren Auseinanderſetzung dieſes Falles vergl. Kap. 10.

ψ gegeben sind — und es sei z. B. das Integral auf alle Werthesysteme von x und y zu erstrecken, welche den Functionen:

$$x^2 + y^2 - a^2 \text{ und } x^2 + y^2 - a'^2$$

verschiedene Zeichen geben; so ist $\delta y = 0$, und die erste der Gleichungen (C) reducirt sich auf:

$$V_y - V_x \frac{dy}{dx} = 0,$$

oder für V_x, V_y und $\frac{dy}{dx}$ ihre Werthe:

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}, \quad \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}} \quad \text{und} \quad -\frac{x}{y}$$

gesetzt, auf:

$$px + qy = 0.$$

Substituirt man für p und q ihre aus der Gleichung:

$$y = xf(z) + F(z)$$

abgeleiteten Werthe, so wird diese Bedingung gleichbedeutend mit:

$$Fz = 0.$$

Die allgemeine Auflösung reducirt sich also in diesem Falle auf:

$$y = xfz, \tag{c}$$

wo die Function f unbestimmt bleibt, weil die Bedingung:

$$V_y - V_x \frac{dy}{dx} = 0$$

offenbar auch an der zweiten Integrationsgrenze erfüllt wird. — Die durch die Natur der Aufgabe gegebenen Bedingungen sind also hier nicht unabhängig von einander. Aber wenn die zweite Function nicht dieselbe Form hätte, als die erste, so würde die Gleichung wieder bestimmt. — Wenn z. B. die zweite Grenzfunction folgende wäre:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1,$$

und man brächte die allgemeine Auflösung (c) auf die Form:

$$z = F_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

auf welche sie vermöge der Bedingung $F = 0$ gebracht werden kann; so ließe sich leicht zeigen: daß den Bedingungen der Aufgabe nur durch die Gleichung:

$$z = c$$

genügt wird; aber da alsdann $V = 0$ wird, so gibt es kein endliches Maximum, oder Minimum. —

Zu einem ähnlichen Resultate gelangt man, wenn das Integral auf alle Werthe von x und y erstreckt werden muß, welche die Function:

$$\varphi_1 = (x^2 + y^2 - a^2)$$

negativ machen. Denn wenn man aus der Gleichung:

$$z = f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

auf welche die allgemeine Auflösung wieder gebracht werden kann, die Werthe von p und q ableitet; so erhält man:

$$\sqrt{(p^2 + q^2)} = \frac{f'_1}{x}\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)},$$

und wie früher erhellet alsdann, daß $f'_1 = 0$, und folglich $f_1 = z = c$ ist. —

(2). Wir wollen nun annehmen, daß auch die Grenzwerthe von z gegeben sind, und daß z. B. für:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \text{ ist: } z = m\frac{y}{x},$$

und für:

$$x^2 + y^2 - a'^2 = 0 \text{ ist: } z = m'\frac{y}{x}.$$

Wenn man x und y mittelst der beiden ersten der letzten Gleichungen aus der allgemeinen Auflösung:

$$y = xf(z) + Fz$$

eliminirt, ſo erhält man die Relation:

$$\frac{az}{\sqrt{(m^2+z^2)}} = \frac{am}{\sqrt{(m^2+z^2)}} f(z) + F(z),$$

und ebenſo mittelſt der beiden letzten dieſer Gleichungen:

$$\frac{a'z}{\sqrt{(m'^2+z^2)}} = \frac{a'm'}{\sqrt{(m'^2+z^2)}} f(z) + F(z).$$

Löſ't man dieſe Gleichungen für $f(z)$ und $F(z)$ auf, ſo findet man:

$$f(z) = \frac{a\sqrt{(m'^2+z^2)} - a'\sqrt{(m^2+z^2)}}{am\sqrt{(m'^2+z^2)} - a'm'\sqrt{(m^2+z^2)}} z,$$

$$F(z) = \frac{aa'(m-m')z}{am\sqrt{(m'^2+z^2)} - a'm'\sqrt{(m^2+z^2)}},$$

und mithin wird in dieſem Falle die vollſtändige Auflöſung durch die Gleichung:

$$\{am\sqrt{(m^2+z^2)} - a'm'\sqrt{(m^2+z^2)}\}y$$
$$= a\{\sqrt{(m'^2+z^2)} - a'\sqrt{(m^2+z^2)}\}zx + aa'(m-m')z$$

gegeben. —

120. Aufgaben über relative Maxima und Minima werden ganz nach denſelben Principien behandelt, wie früher bei Ausdrücken mit einfachen Integralen. — Wenn z. B. verlangt würde, die Form der Function z ſo zu beſtimmen, daß das Integral:

$$\iint V dx dy$$

ein Maximum, oder ein Minimum wird, und zugleich ein anderes Integral:

$$\iint V' dx dy$$

einen gegebenen conſtanten Werth bekommt; ſo brauchte man für z nur eine ſolche Form zu ſuchen, welche den Ausdruck:

$$\iint V dx dy + m\iint V' dx dy$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht, indem man die willkürliche Conſtante m wieder wie früher durch den gegebenen Werth des zweiten Integrales beſtimmt — und übrigens ganz wie in dem

Falle eines absoluten Maximums, oder Minimums verfährt. —

Der Beweis, daß der unbestimmte Factor, womit das zweite Integral multiplicirt werden muß, eine Constante sein muß, ist dem in Nr. 61 ganz ähnlich. — Der Grund davon liegt darin: daß, da die zu erfüllende Gleichung von der Form ist:

$$\iint \ldots V'dxdy \ldots = c,$$

der unbestimmte Factor, womit sie multiplicirt ist, außerhalb des Integralzeichens steht. — Denn da das Endresultat der bestimmten Integration eine constante, d. h. von x, y... unabhängige Größe ist; so ist klar: daß eine Gleichung von der Form:

$$\iint \ldots Wdxdy \ldots + \lambda \iint \ldots W'dxdy \ldots = 0$$

nur bei einem constanten Werthe von λ stattfinden kann. —

Dasselbe ergibt sich auch, wenn das bestimmte Integral als eine Summe von Elementen betrachtet wird. — Die Bedingungsgleichung ist alsdann:

$$V'_1 dx_1 dy_1 \ldots + V'_2 dx_2 dy_2 \ldots + V'_3 dx_3 dy_3 \ldots + \&c. = \text{const.},$$

wo V'_1, V'_2, ... die Werthe von V' sind, welche den verschiedenen Werthesystemen:

$$x_1,\ y_1, \ldots\ x_2,\ y_2, \ldots \&c.$$

entsprechen. — Multiplicirt man die letzte Gleichung mit einem unbestimmten Factor λ, so erhält man:

$$\lambda(V'_1 dx_1 dy_1 \ldots + V'_2 dx_2 dy_2 \ldots + V'_3 dx_3 dy_3 \ldots + \&c. - c) = 0,$$

und da λ offenbar mit m in der Gleichung:

$$\iint \ldots Vdxdy \ldots + m \iint \ldots V'dxdy$$

identisch ist; so hat λ für alle die Größen:

$$V'_1,\ V'_2,\ V'_3,\ \&c.,$$

d. h. für alle Werthe von x, y, ... denselben Werth, ist also constant. —

121. Eine andere Art relativer Maxima und Minima ist die, wo sich das Integral, welches einen gegebenen Werth haben

muß, nur auf die Werthe von x und y bezieht, welche der Grenzgleichung:

$$\varphi(x, y) = 0$$

genügen, und welches folglich ein um eine Einheit weniger vielfaches Integral ist, als das zu einem Maximum, oder Minimum zu machende Integral. —

Zwischen der Behandlungsart dieser und jeder andern Gattung relativer Maxima und Minima ist kein wesentlicher Unterschied. Die Variation des Integrales, welches einen gegebenen Werth haben soll, wird wieder mit einem unbestimmten constanten Factor multiplicirt und das Produkt zu den Gliedern addirt, welche in der Variation des ursprünglichen Integrales nicht mit dem vielfachsten Integralzeichen behaftet sind, worauf die Aufgabe wie in dem gewöhnlichen Falle behandelt und die willkürliche Constante mittelst des gegebenen Integralwerthes bestimmt wird. —

Beispiel.

122. Unter allen Formen der Function z diejenige zu finden, welche das bestimmte Integral:

$$\iint \sqrt{(p^2 + q^2)}\, dx dy$$

einer gegebenen Größe gleich, und zugleich das Integral:

$$\iint (z - px - qy)\, dx dy$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht. —

Hier ist:

$$V = z - px - qy + n\sqrt{(p^2 + q^2)},$$

und mithin:

$$Z = 1, \quad V_x = -x + \frac{np}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}, \quad V_y = -y + \frac{nq}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}.$$

Leitet man hieraus die Werthe von $\frac{dV_x}{dx}$, $\frac{dV_y}{dy}$ ab, substituirt sie in die Gleichung:

$$Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} = 0,$$

und ſetzt der Kürze wegen $m = -\frac{3}{n}$; ſo erhält man die Gleichung:

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = m(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{(a)}$$

welche ſich leicht nach der gewöhnlichen Methode integriren läßt, und gibt:

$$\{x+\psi_1(z)\}^2 + \{y+\psi_2(z)\}^2 = \frac{1}{m^2}. \qquad \text{(b)}$$

Unter den verſchiedenen Fällen, welche hinſichtlich der Beſtimmung der arbiträren Functionen vorkommen können, wählen wir hier den aus, wo die Grenzfunctionen durch Elimination von z zwiſchen der Gleichung (b) und jeder der Gleichungen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= A^2, \\ (x+z)^2 + (y+z)^2 &= B^2 \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

erhalten werden. Setzt man die Werthe von V, V_x, V_y in die Gleichung:

$$V + V_x(p'-p) + V_y(q'-q)\,0,$$

ſo bekommt man:

$$z - p'x - q'y + \frac{n(pp'+qq')}{\sqrt{(p^2+q^2)}} = 0. \qquad \text{(d)}$$

Aber aus der erſten der Gleichung (c) folgt:

$$p' = -\frac{x}{z} \quad q' = -\frac{y}{z},$$

mithin iſt:

$$z - p'x - q'y = \frac{A^2}{z},$$

und die Gleichung (b) gibt:

$$p = -\frac{x+\psi_1(z)}{x+\psi_1(z)\{\psi'_1(z) + \{y+\psi_2(z)\}\psi'_2(z)},$$

$$q = -\frac{y+\psi_2(z)}{\{x+\psi_1(z)\}\psi'_1(z) + \{y+\psi_2(z)\}\psi'_2(z)}.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung (d), ſo wird ſie:

$$A^2 = 3\{x + \psi'_1(z)\}x + 3\{y + \psi_2(z)\}y$$

oder:

$$x\psi_1(z) + y\psi_2(z) = z^2 - \tfrac{3}{8}A^2.$$

Hieraus und aus der Gleichung:

$$\{x + \psi_1(z)\}^2 + \{y + \psi_2(z)\}^2 = \frac{1}{m^2}$$

ist leicht zu ersehen, daß man zwischen ψ_1 und ψ_2 die Relation hat:

$$\{\psi_1(z)\}^2 + \{\psi_2(z)\}^2 = \frac{1}{m^2} + \tfrac{1}{8}A^2 - z^2.$$

Verfährt man mit der zweiten der Gleichungen (c) ebenso, und setzt der Einfachheit wegen $A = B$; so findet man:

$$\psi_1(z) + \psi_2(z) = \tfrac{1}{2}z.$$

Leitet man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ ab, und substituirt sie in die Gleichung (b); so findet man endlich:

$$\{4x + z + \sqrt{(m'^2 - 9z^2)}\}^2 + \{4y + z - \sqrt{(m'^2 - 9z^2)}\}^2 = \frac{16}{m^2},$$

wo:

$$m'^2 = \frac{8}{m^2} + \frac{8A^2}{3}$$

ist, und die Constante m wird durch den gegebenen Werth des Integrales:

$$\iint \sqrt{(p^2 + q^2)}\, dxdy$$

bestimmt. —

Aufgabe II.

123. Wenn z eine Function von x und y ist, welche der Gleichung:

$$D \cdot \iint V dxdy = 0$$

genügt, zu bestimmen, welche weitern Bedingungen erforderlich sind, damit der entsprechende Werth des Integrales ein Maximum, oder ein Minimum wird. —

Aufl. Wie in dem Falle eines einfachen Integrales, muß die

zweite Variation stets dasselbe Zeichen behalten, welche mit den Bedingungen der Aufgabe verträgliche Form man der Variation δz auch geben mag. — Wir wollen, wie in Aufg. V in Kap. 3, zwischen dem Falle, wo es sich um die Variation der Grenzwerthe von z und seiner Differentialquotienten handelt, und dem Falle unterscheiden, wo die Variation in der allgemeinen Form der Function in Betracht kommt — und, indem wir uns auf die Betrachtung des letzten Falles beschränken, annehmen, daß die Grenzwerthe von:

$$y,\ z \text{ und } \frac{dz}{dx} \text{ oder } \frac{dz}{dy}$$

gegeben sind. — Alsdann verschwinden alle Glieder außerhalb des doppelten Integralzeichens, und die zweite Variation des betrachteten Integrales wird offenbar:

$$\begin{aligned}\delta^2\iint V dx dy = \iint\Big(&\frac{d^2V}{dr^2}\delta r^2 + \frac{d^2V}{ds^2}\delta s^2 + \frac{d^2V}{dt^2}\delta t^2 + 2\frac{d^2V}{drds}\delta r\delta s\\ &+ 2\frac{d^2V}{dsdt}\delta s\delta t + 2\frac{d^2V}{drdt}\delta r\delta t + 2\frac{d^2V}{drdp}\delta r\delta p + 2\frac{d^2V}{drdq}\delta r\delta q\\ &+ 2\frac{d^2V}{drdz}\delta r\delta z + 2\frac{d^2V}{dsdp}\delta s\delta p + 2\frac{d^2V}{dsdq}\delta s\delta q + 2\frac{d^2V}{dsdz}\delta s\delta z \qquad (A)\\ &+ 2\frac{d^2V}{dtdp}\delta t\delta p + 2\frac{d^2V}{dtdq}\delta t\delta q + 2\frac{d^2V}{dtdz}\delta t\delta z + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\\ &+ \frac{d^2V}{dq^2}\delta q^2 + 2\frac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q + 2\frac{d^2V}{dpdz}\delta p\delta z + 2\frac{d^2V}{dqdz}\delta q\delta z\\ &+ \frac{d^2V}{dz^2}\delta z^2\Big)\,dxdy.\end{aligned}$$

Es kommt also darauf an: die in (A) vorkommenden willkürlichen Variationen, bei einer schicklichen Form von δz, so zu bestimmen: daß der Ausdruck (A) stets positiv, oder negativ bleibt, vorausgesetzt: 1) daß das Zeichen des Elementes oder der Größe unter dem Integralzeichen in (A) nicht unabhängig ist von den Variationen δr, δs, ... und: 2) daß sich das Integral (A) nicht auf ein anderes reduciren läßt, worin das Zeichen des Elementes von diesen Variationen unabhängig ist. — Im ersten Falle muß das Integral (A), als eine quadratische Function von sechs independenten Veränder-

lichen betrachtet, unabhängig von den besonderen Werthen der darin vorkommenden Veränderlichen, dasselbe Zeichen behalten — muß sich also auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} A(\delta z+\alpha'\delta p+\alpha''\delta q+\&c.)^2+B(\delta p+\beta\delta q+\&c.)^2 \\ +\&c. \\ +I\delta t^2 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

bringen lassen, wo $A, B, \ldots I$ alle dasselbe Zeichen haben. —

Im zweiten Falle, wo das Integral auf ein anderes reducirt werden kann, welches der ersten Bedingung genügt, ist einleuchtend, daß das Element des zweiten Integrales von dem des ersten um eine Größe verschieden ist, welche bei der bestimmten Integration zum Verschwinden gebracht werden kann, d. h. um eine Größe, welche an und für sich integrabel ist. — Soll also diese Bedingung erfüllt werden können, so muß sich die Größe unter dem Integralzeichen in (A) in drei andere zerlegen lassen, wovon die eine nach x, die andere nach y integrabel und die dritte so beschaffen ist, daß der ersten Bedingung genügt wird. — Da aber die Anwendung dieses Satzes auf den vorliegenden Fall zu sehr weitschichtigen Formeln führt, so beschränken wir uns hier darauf, daß wir blos die wichtigsten Momente und Resultate des Verfahrens angeben. —

(1). Nach dem vorhergehenden Satze nehme man:

$$\frac{d^2V}{dr^2}\delta r^2+\frac{d^2V}{ds^2}\delta s^2+\frac{d^2V}{dt^2}\delta t^2+\&c.=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+K, \quad (C)$$

so ist leicht einzusehen, daß P und Q folgende Formen haben müssen:

$$P=\alpha\delta q^2+\beta\delta q\delta p+\gamma\delta q\delta z+\varepsilon\delta p^2+\zeta\delta p\delta z^2+\eta\delta z^2,$$

$$Q=\alpha'\delta q^2+\beta'\delta q\delta p+\gamma'\delta q\delta z+\varepsilon'\delta p^2+\zeta'\delta p\delta z^2+\eta'\delta z^2.$$

(2). Differenzirt man die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y, und substituirt in (C); so findet man:

$$K=\frac{d^2V}{dr^2}\delta r^2+\frac{d^2V}{ds^2}\delta s^2+\frac{d^2V}{dt^2}\delta t^2+2\frac{d^2V}{drds}\delta r\delta s$$
$$+\frac{d^2V}{dsdt}\delta s\delta t+2\frac{d^2V}{drdt}\delta r\delta t+\lambda\delta r\delta p+\mu\delta r\delta q$$
$$+\&c.,$$

worin die Coefficienten der Quadrate und Produkte der Variationen von der höchsten Ordnung dieselben sind, wie in (A).

(3). Da das Zeichen von K von den darin vorkommenden Variationen δr, δs, ... unabhängig ist, so muß sich K auf die Form (B) bringen lassen, was fünf Bedingungen gibt, wovon zwei offenbar von den unbestimmten Größen α, β, ...; α', β', ... unabhängig sind, und ausdrücken: daß das Zeichen des Polynomes:

$$\frac{d^2V}{dr^2}\delta r^2+\frac{d^2V}{ds^2}\delta s^2+\frac{d^2V}{dt^2}\delta t^2$$

$$+2\frac{d^2V}{drds}\delta r\delta s+2\frac{d^2V}{dsdt}\delta s\delta t+2\frac{d^2V}{drdt}\delta r\delta t \qquad \text{(D)}$$

von den Variationen δr, δs, δt unabhängig ist. —

(4). Wenn diese Bedingung erfüllt wird, so erhellet aus (3), daß mittelst der unbestimmten Größen α, β....; α', β',... noch drei andere Bedingungen zu erfüllen sind — und wenn dies möglich ist, ohne daß K zwischen den Integrationsgrenzen unendlich gemacht wird; so ist der Werth des betrachteten Integrales ein Maximum, oder ein Minimum, jenachdem das Polynom (D) ein negatives, oder ein positives Zeichen hat. —

Dasselbe Verfahren läßt sich auch auf solche Fälle erstrecken, wo V Differentialquotienten von beliebiger Ordnung enthält; aber alsdann läßt sich die Gleichung:

$$\Omega = 0$$

in Aufg. I so selten integriren, daß es in praktischer Hinsicht ganz zwecklos ist, diesen Gegenstand hier weiter zu verfolgen. —

Aufgabe III.

124. Wenn V eine Function der independenten Veränderlichen x, y, z, sowie der Function u und ihrer Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung incl. ist, die Form der Function u so zu bestimmen, daß das Integral:

$$U = \iiint V dx dy dz$$

ein Maximum, oder Minimum wird, indem die Grenzen des In-

tegrales so bestimmt vorausgesetzt werden, daß das Integral auf alle Werthe von x, y, z erstreckt wird, welche den Bedingungen:

$$\varphi(x, y, z) < 0, \quad \psi(x, y. z) > 0$$

genügen. —

Aufl. Durch ähnliche Schlüsse, wie die bei einfachen und doppelten Integralen gemachten, ergibt sich, daß die Gleichung:

$$DU = 0$$

erfüllt werden muß. — Setzt man zur Abkürzung:

$$\Theta = V_z - pV_x - qV_y - \frac{dV_{z^2}}{dz} + 2p\frac{dV_{xz}}{dx} + 2q\frac{dV_{yz}}{dy} + p^2\frac{dV_{x^2}}{dz} + q^2\frac{dV_{y^2}}{dz}$$

$$+ q\frac{dV_{xy}}{dx} + p\frac{dV_{xy}}{dy} + pq\frac{dV_{xy}}{dz} - \frac{dV_{xz}}{dx} - \frac{dV_{yz}}{dy}$$

$$+ V_{y^2}r + V_{xy}s + V_{y^2}t,$$

$$\Theta' = V_{z^2} + p^2V_{x^2} + q^2V_{y^2} - pV_{xz} + qV_{yz} - pqV_{xy}$$

und:

$$\Omega = U - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} - \frac{dV_z}{dz}$$

$$+ \frac{d^2V_{x^2}}{dx^2} + \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2} + \frac{d^2V_{z^2}}{dz^2} + \frac{d^2V_{xy}}{dxdy} + \frac{d^2V_{xz}}{dxdz} + \frac{d^2V_{yz}}{dydz};$$

so wird diese Gleichung nach dem für DU im vorhergehenden Kapitel gefundenen Werthe:

$$\iint\left(V\delta z + \Theta\delta u + \Theta'\frac{d\delta u}{dz}\right)kdxdy$$

$$-\iint\left(V\delta z + \Theta\delta u + \Theta'\frac{d\delta u}{dz}\right)k'dxdy + \iiint\Omega\delta udxdydz = 0,$$

und zerfällt offenbar in die drei folgenden Gleichungen:

$$\left(V\delta z + \Theta\delta u + \Theta'\frac{d\delta u}{dz}\right)_1 = 0,$$

$$\left(V\delta z + \Theta\delta u + \Theta'\frac{d\delta u}{dz}\right)_0 = 0, \qquad (B)$$

$$\Omega = 0,$$

wovon die erſte für alle Werthe von x, y, z ſtattfinden muß, welche der Gleichung:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

genügen, die zweite für alle Werthe, welche der Gleichung:

$$\psi(x, y, z) = 0$$

genügen, und die dritte für alle Werthe, welche den Bedingungen:

$$\varphi(x, y, z) < 0, \quad \psi(x, y, z) > 0$$

Genüge leiſten. —

Die Behandlungsweiſe dieſer Gleichungen iſt der in der vorhergehenden Aufgabe ganz analog. — Die Gleichung:

$$\Omega = 0,$$

welche offenbar eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung iſt, gibt die allgemeine Relation zwiſchen der Function u und den independenten Veränderlichen x, y, z, und die übrigen Gleichungen dienen zur Beſtimmung der in dem Integrale vorkommenden arbiträren Functionen. — Was die Beſtimmung dieſer Functionen anlangt, ſo wollen wir uns wie in Aufg. I auf die Betrachtung des Falles beſchränken, wo das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\Omega = 0$$

nur arbiträre Functionen derſelben Größen enthält — ſo daß die Anzahl der arbiträren Functionen wieder vollſtändig, d. h. der Ordnungszahl der partiellen Differentialgleichung gleich wird. —

(1). Wenn die Form der Grenzfunction φ gegeben iſt, ſo iſt, wie in dem Falle eines Doppelintegrales, wieder $\delta z = 0$. Die erſte der Gleichungen (B) gibt alſo die Gleichungen:

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta'_1 = 0, \tag{C}$$

welche in Verbindung mit:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{D}$$

zwei Gleichungen zwiſchen den in dem Integrale der Gleichung $\Omega = 0$ vorkommenden arbiträren Functionen gibt, was genau wie in dem

Falle eines Doppelintegrales bewieſen wird. — Denn es ſei das Integral der partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$u = F\{x, y, z, \varphi_1(v, v'), \varphi_2(v, v'), \varphi_3(v, v'), \varphi_4(v, v')\}, \quad (E)$$

wo v, v' gegebene Functionen von x, y, z ſind — z. B.:

$$v = ax + by + cz, \quad v' = a'x + b'y + c'z; \quad (F)$$

ſo erhält man durch Elimination von u, x, y, z zwiſchen den ſechs Gleichungen (C), (D), (E), (F) zwei Gleichungen von der Form:

$$f_1\{v, v', \varphi_1(v, v'), \varphi_2(v, v'), \varphi_3(v, v'), \varphi_4(v, v')\} = 0,$$

$$f_2\{v, v', \varphi_1(v, v'), \varphi_2(v, v'), \varphi_3(v, v'), \varphi_4(v, v')\} = 0.$$

Zwei andere Gleichungen ergeben ſich auf ähnliche Weiſe aus der andern Grenzfunction ψ, ſo daß man zuſammen vier Gleichungen zur Beſtimmung der vier arbiträren Functionen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 hat. — Subſtituirt man die gefundenen Werthe dieſer Functionen in (E), ſo erhält man endlich ein beſtimmtes Reſultat von der Form:

$$f(u, x, y, z) = 0.$$

(2). Wenn der der Grenzfunction φ entſprechende Werth von u auch gegeben iſt, ſo tritt eine ähnliche Modification ein, wie die in Nr. 112. Die Gleichung $\Theta_1 = 0$ fällt nämlich weg und es tritt dafür eine andere Gleichung an die Stelle, welche ſich aus dem gegebenen Werthe von u ergibt. — Desgleichen, wenn der Grenzwerth eines der Differentialquotienten:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}$$

ebenfalls gegeben iſt, ſo fällt die Gleichung $\Theta'_1 = 0$ auch weg, und wird durch eine andere erſetzt, welche ſich aus dem gegebenen Werthe dieſes Differentialquotienten ergibt. —

(3). Wenn endlich die Form der Grenzfunction φ erſt durch Elimination von u zwiſchen der Gleichung (E) und einer gegebenen beſtimmten Gleichung:

$$u = f(x, y, z)$$

beſtimmt werden muß; ſo ſind die Variationen δu, δz durch die Gleichungen:

$$\frac{df}{dz}\delta z = \frac{dF}{dz}\delta z + \delta F = \frac{dF}{dz}\delta z + \delta u$$

verknüpft, und, wie in dem Falle eines doppelten Integrales, ist die erste der Gleichungen (B) gleichbedeutend mit:

$$V_1 + \Theta_1\left(\frac{df}{dz} - \frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

$$\Theta'_1 = 0,$$

so daß man wieder dieselbe Anzahl von Gleichungen hat, wie zuvor. — Es ist unnöthig, diese Untersuchung weiter fortzusetzen, weil das Verfahren dem frühern bei einem Doppelintegrale ganz analog ist. — Jede Bedingung, wodurch die Anzahl der durch (B) gegebenen Gleichungen vermindert wird, gibt auch hier wieder eine hinreichende Anzahl neuer Gleichungen an die Hand, wodurch jene ersetzt werden.

Achtes Kapitel.

Anwendung der Variationsrechnung auf Geometrie.

B. Auf krummen Flächen.

125. Die Anwendungen der Variationsrechnung auf die Theorie der krummen Flächen sind ihrer Natur nach sehr beschränkt; denn selbst innerhalb der engen Grenzen, welche wir uns schon in Nr. 62 gesetzt haben, sind die Mittel, welche man zur Integration partieller Differentialgleichungen besitzt, so beschränkt, daß man im Allgemeinen zu keinen genügenden Resultaten gelangen kann. — Dies ist aber ein Mangel der Integral- und nicht der Variationsrechnung; denn die Regeln der letztern führen immer auf eine, oder mehrere Gleichungen, welche die charakteristische Eigenschaft der gesuchten Fläche oder Klasse von Flächen ausdrücken — und es ist alsdann die Aufgabe der Integralrechnung: die endliche Gleichung derselben zwischen den Coordinaten daraus abzuleiten. —

Aufgabe I.

126. Die krumme Fläche zu finden, für welche das Integral

$$\iint \mu\, dS$$

ein Maximum, oder ein Minimum wird, wenn dS das Flächenelement und μ eine gegebene Function der Coordinaten x, y, z ist.

Aufl. Setzt man für dS seinen Werth:

$$\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}\, dx dy,$$

so wird das fragliche Integral:

$$\iint \mu \sqrt{(+ p^2 + q^2)}\, dx dy;$$

es ist also:

$$V = \mu \sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

woraus folgt:

$$Z=\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,\frac{d\mu}{dz},\quad V_x=\frac{\mu p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\quad V_y=\frac{\mu q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$V_{x^2}=0,\quad V_{xy}=0,\quad V_{y^2}=0,$$

und hieraus durch Differentiation:

$$\frac{dV_x}{dx}=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\mu}{dx}+p\frac{d\mu}{dz}\right)+\mu\frac{(1+q^2)r-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dV_y}{dy}=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\left(\frac{d\mu}{dy}+q\frac{d\mu}{dz}\right)+\mu\frac{(1+p^2)r-pqs}{(1+p^2+q^2)_{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung:

$$\Omega=Z-\frac{dV_x}{dx}-\frac{dV_x}{dy}=0$$

auf S. 266 wird demnach:

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\left(p\frac{d\mu}{dx}+q\frac{d\mu}{dy}-\frac{d\mu}{dz}\right)=0, \tag{A}$$

und gestattet eine ähnliche geometrische Interpretation, wie die S. 156 von der entsprechenden Gleichung gegebene. — Denn wenn R, R' die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche bedeuten, so ist bekanntlich:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn α,β,γ die spitzen Winkel bezeichnen, welche die Normale mit den Coordinatenaxen macht; so kann die letzte Gleichung auf die Form:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R}=-\frac{1}{\mu}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right)$$

gebracht werden, aus welcher Gleichung sich leicht ähnliche Theoreme ableiten lassen, wie die früher bei krummen Linien gefundenen. — Ist z. B. μ eine homogene Function des $m$ten Gliedes, so erhält man ein ähnliches Theorem, wie das auf S. 169.

Denken wir uns wieder eine Fläche beschrieben, deren Gleichung $\mu=$ const. ist, und in Bezug auf diese Fläche durch den Anfangspunkt zu der von dem Anfangspunkte nach irgend einem Punkte der Fläche, welche $\iint\mu dS$ zu einem Maximum, oder Minimum macht, gezogenen Geraden eine conjugirte Ebene gelegt; so ergibt sich

genau wie früher (S. 168), wenn n das zwiſchen dieſer Ebene und der krummen Fläche liegende Stück der Normale der letzten bezeichnet:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{m}{n},$$

d. h.: Wenn μ eine **homogene** Function m ten Grades von x, y, z iſt, ſo iſt die Fläche, welche das Integral $\iint \mu dS$ zu einem **Maximum**, oder **Minimum** macht, ſo beſchaffen: daß die Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungshalbmeſſer dem m fachen reciproken Werthe der Normale n gleich iſt. —

Um die Bedingungen kennen zu lernen, welche an den Integrationsgrenzen erfüllt werden müſſen, wollen wir annehmen, daß die geſuchte Fläche von zwei Flächen begrenzt wird, deren Differentialgleichungen folgende ſind:

$$dz = p'dx + q'dy,$$
$$dz = p''dx + q''dy.$$

Wegen:

$$\alpha_0 = V_y - V_x\frac{dy}{dx} = \frac{\mu_0\left(q - p\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \text{(S. 266)}$$

und:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p'-p}{q-q'}$$

wird alsdann die Gleichung:

$$V_0 + \alpha_0 (q' - q) = 0$$

offenbar:

$$\mu_0\sqrt{(1+p^2+q^2)} + \mu_0\frac{q(q'-q)+p(p'-p)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = 0,$$

oder wenn man die Brüche fortſchafft und die Annahme $\mu_0 = 0$ unbeachtet läßt:

$$1 + pp' + qq' = 0;$$

und ebenſo würde man finden:

$$1 + pp'' + qq'' = 0.$$

Die geſuchte Fläche durchſchneidet alſo ihre Begrenzungsflächen unter rechten Winkeln. —

Beiſpiel.

127. Eine Fläche von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß der zwiſchen zwei gegebenen Flächen liegende Theil derſelben den kleinſten Flächeninhalt hat. —

Hier iſt:

$$\mu = 1, \quad \frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 0, \quad \frac{d\mu}{dz} = 0,$$

ſo daß die allgemeine Gleichung in dieſem Falle wird:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0,$$

und gibt entweder:

$$R = \infty, \quad R' = \infty, \text{ oder } R + R' = 0.$$

In der erſten Vorausſetzung wäre alſo die geſuchte Fläche eine Ebene, was jedoch nicht die allgemeine Auflöſung iſt, weil es unmöglich iſt, damit in allen Fällen die Grenzbedingungen zu erfüllen. — Man muß alſo nehmen:

$$R + R' = 0,$$

d. h. die geſuchte Fläche von dem kleinſten Flächeninhalte iſt im Allgemeinen ſo beſchaffen: daß die Hauptkrümmungshalbmeſſer in jedem ihrer Punkte gleich und von entgegengeſetztem Zeichen ſind.*) —

Aufgabe 2.

128. Die Fläche zu finden, welche das Integral:

$$\iint(\mu dS + \mu' dx dy)$$

wo dS das Flächenelement und μ, μ' zwei gegebene Functionen von x, y, z bedeuten, zu einem Maximum, oder Minimum macht.

Aufl. In dieſem Falle iſt:

$$V = \mu\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + \mu',$$

*) Wegen der weitern Unterſuchung dieſer Fläche vergl. Monge: Application de l'Analyse à la Géométrie, p. 184.

woraus folgt:

$$Z = \sqrt{(1+p^2+q^2)}\,\frac{d\mu}{dz} + \frac{d\mu'}{dz},$$

$$V_x = \frac{\mu p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

$$\frac{dV_x}{dx} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\left(\frac{d\mu}{dx} + p\,\frac{d\mu}{dz}\right) + \mu\,\frac{(1+q^2)r - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$V_y = \frac{\mu q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\frac{dV_y}{dy} = \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\left(\frac{d\mu}{dy} + q\,\frac{d\mu}{dz}\right) + \mu\,\frac{(1+p^2)t - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung:

$$\Omega = Z - \frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} = 0$$

wird daher:

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{1}{\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\left(p\,\frac{d\mu}{dx} + q\,\frac{d\mu}{dy} - \frac{d\mu}{dz}\right) - \frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu'}{dz} = 0, \quad \text{(A)}$$

oder wenn, wie in der vorhergehenden Aufgabe, wieder die Größen R, R', α, β, γ eingeführt werden:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{1}{\mu}\left(\cos\alpha\,\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\,\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\,\frac{d\mu}{dz} + \frac{d\mu'}{dz}\right). \quad \text{(B)}$$

Die Glieder außerhalb des doppelten Integralzeichens sind offenbar:

$$\iint\left\{(\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)} + \mu')\delta y + \frac{\mu q - \mu p\,\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\,\delta z\right\}dx,$$

und wenn man diese Größe, wie in der vorhergehenden Aufgabe, unter der Voraussetzung behandelt, daß die gesuchte Fläche von zwei gegebenen Flächen begrenzt wird; so hat man an jeder Grenze die Gleichung:

$$\mu(1+pp'+qq')+\mu'\sqrt{(1+p^2+q^2)}=0.$$

Wenn alſo ω_0, ω_1 die Winkel ſind, unter welchen die geſuchte Fläche ihre Begrenzungsflächen durchſchneidet; ſo hat man:

$$\cos\omega_0=-\frac{\mu'_0}{\mu_0}\cos\theta_0,$$
$$\cos\omega_1=-\frac{\mu'_1}{\mu_1}\cos\theta_1, \qquad (C)$$

wo θ_0, θ_1 die Winkel bedeuten, welche die Berührungsebenen an den beiden Grenzflächen mit der Ebene der xy machen. —

Beiſpiel.

129. Eine krumme Fläche von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß ſie bei einer gegebenen Größe ihres Flächeninhaltes das größeſte Volumen umſchließt. —

Nach dem allgemeinen Principe für iſoperimetriſche Probleme (Nr. 61) iſt das hier zu einem Maximum zu machende Integral offenbar:

$$\iint\{z-a\sqrt{(1+p^2+q^2)}\}\,dxdy,$$

ſo daß ſich die geſuchte Auflöſung aus der allgemeinen Aufgabe ergibt, wenn man ſetzt:

$$\mu=-a,\quad \mu'=z,$$

alſo:

$$\frac{d\mu}{dx}=0,\quad \frac{d\mu}{dy}=0,\quad \frac{d\mu}{dz}=0,\quad \frac{d\mu'}{dz}=1,$$

wodurch ſich die Gleichungen (A) und (B) reſp. auf:

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t+\frac{1}{a}(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}=0$$

und:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{a} \qquad (D)$$

reduciren. —

Die Fläche, welche bei einem gegebenen Flächeninhalte das größeſte Volumen einſchließt, iſt folglich ſo

beſchaffen, daß die Summe ihrer Hauptkrümmungen für jeden ihrer Punkte conſtant iſt. —

130. Die Gleichungen, welche die außerhalb des doppelten Integralzeichens ſtehenden Glieder geben, hängen folglich von der beſondern Form ab, in welcher die Aufgabe vorgelegt iſt. — Wenn z. B. eine ſolche Fläche geſucht würde, daß der Theil derſelben, welcher von den Durchſchnittslinien derſelben mit einer gegebenen Fläche und der Ebene der xy begrenzt wird, eine gegebene Größe hat, und daß das Volumen zwiſchen jenem Flächentheile, der projicirenden Cylinderfläche der erſten Durchſchnittscurve und der Ebene der xy ein Maximum wird; ſo reducirt ſich die erſte der Gleichungen (C) auf S. 209 auf folgende:

$$z_1 \cos\theta_1 = a \cos\omega_1. \qquad (a)$$

Wenn ferner die erſte Begrenzungscurve in einer in der Entfernung $= b$ zu der Ebene der xy parallelen Ebene läge, ſo wäre:

$$z_1 = b, \quad \cos\theta_1 = 1,$$

und folglich:

$$\cos\omega_1 = \frac{b}{a}. \qquad (b)$$

Die geſuchte Fläche durchſchneidet alſo die Begrenzungsebene unter einem conſtanten Winkel — und die Durchſchnittscurve iſt in dieſem Falle eine Krümmungslinie. — Die zweite der Gleichungen (C) wird unter denſelben Umſtänden:

$$\cos\omega_0 = 0,$$

ſo daß die geſuchte Fläche die Ebene der xy unter einem rechten Winkel ſchneidet.

Für $b = a$ wird die Gleichung (b):

$$\cos\omega_1 = 1, \text{ oder } \omega_1 = 0,$$

ſo daß die geſuchte Fläche die Begrenzungsebene in einem Punkte berührt, weil eine Berührung längs einer Curve nach der Natur der Aufgabe nicht möglich iſt. — Für $b > a$ wird die Gleichung (b) unmöglich.

132. Als einen zweiten ſpeciellen Fall wollen wir annehmen, daß zwei Curven von gegebenen Längen, wovon die eine in der Ebene

e xy und die andere in einer dazu parallelen Ebene liegt, durch ie Fläche von gegebener Größe verbunden werden ſollen, ſo daß s eingeſchloſſene Volumen ein Maximum iſt. —

Bezeichnen wir mit:

$$(\iint z\,dx\,dy)$$

en Werth des Integrales:

$$\iint z\,dx\,dy,$$

wenn es durch den ganzen von der erſten der obigen Curven umſchloſſenen Raum erſtreckt wird, und durch:

$$[\iint z\,dx\,dy]$$

den Werth deſſelben Integrales, wenn es durch den ganzen, von der Projection der zweiten Curve begrenzten Raum ausgedehnt wird; ſo iſt klar, daß das zu einem Maximum zu machende Volumen ausgedrückt wird durch:

$$(\iint z\,dx\,dy) - [\iint z\,dx\,dy] + z_0 \int y_0\,dx,$$

wo das einfache Integral auf denſelben Raum erſtreckt werden muß, wie das doppelte Integral:

$$[\iint z\,dx\,dy].$$

Ferner wird die Fläche, welche dieſes Volumen ſeitwärts begrenzt, in derſelben Bezeichnungsart ausgedrückt durch:

$$(\iint \sqrt{(1+p^2+q^2)}\,dx\,dy) - [\iint \sqrt{(1+p^2+q^2)}\,dx\,dy],$$

und die reſp. Längen der Begrenzungscurven werden ausgedrückt durch:

$$\int \sqrt{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)}\,dx, \quad \int \sqrt{\left(1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}\right)}\,dx. \tag{a}$$

Die zu einem Maximum zu machende Function wird alſo nach dem allgemeinen Satze für relative Maxima und Minima ausgedrückt durch:

$$\iint \{z - a\sqrt{(1+p^2+q^2)}\}\,dx\,dy$$

$$+\int \left\{y_0 z_0 + m_0 \sqrt{\left(1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}\right)}\right\} dx + m_1 \int \sqrt{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)}\,dx, \tag{b}$$

wo das doppelte Integral durch den ganzen Raum erſtreckt werden

muß, welcher zwiſchen der erſten Curve und der Projection der zweiten liegt. — Die totale oder vollſtändige Variation dieſes Ausdruckes iſt:

$$\iint\left\{1+a\left(\frac{(1-q^2)r+2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}\delta z\,dx\,dy$$

$$+\int\left\{a\left(\frac{q-p\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right)_1\delta z_1+\{z-a\sqrt{(1+p^2+q^2)}\}_1\delta y_1\right\}dx \qquad (c)$$

$$-\int\left\{a\left(\frac{q+p\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right)_0\delta z_0+\{z-a\sqrt{(1+p^2+q^2)}\}_0\delta y_0\right\}dx$$

$$-m_1\int\frac{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}}{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\delta y_1\,dx$$

$$+Dz_0\int y_0\,dx+\int\left(z_0-m_0\frac{\frac{d^2y_0}{dx_0^2}}{\left(1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y_0\,dx.$$

Da eine der Grenzcurven in der Ebene der xy liegt, hat man offenbar:

$$Dz_1=\delta z_1+q_1\delta y_1=0,$$

und da die zweite Grenzcurve in einer dazu parallelen Ebene liegt; ſo iſt Dz_0 offenbar längs der ganzen obern Grenzcurve conſtant. — Eliminirt man alſo δz_0, δz_1 mittelſt der Gleichungen:

$$\delta z_1+q_1\delta y_1=0,\quad \delta z_0+q_0\delta y_0=Dz_0,$$

und ſetzt die Coefficienten der zurückbleibenden Variationen δz, δy_0, δy_1, Dz_0 einzeln $=0$; ſo erhält man die Gleichungen:

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t + \frac{1}{a}\,1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

$$a\,\frac{1+p_1{}^2+p_1q_1\dfrac{dy_1}{dx_1}}{\sqrt{(1+p_1{}^2+q_1{}^2)}} - m_1\,\frac{\dfrac{d^2y_1}{dx_1{}^2}}{\left(1+\dfrac{dy_1{}^2}{dx_1{}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$a\,\frac{1+p_0{}^2+p_0q_0\dfrac{dy_0}{dx_0}}{\sqrt{(1+p_0{}^2+q_0{}^2)}} - m_0\,\frac{\dfrac{d^2y_0}{dx_0{}^2}}{\left(1+\dfrac{dy_0{}^2}{dx_0{}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \qquad \text{(d)}$$

$$\int y_0\,dx - a\int \frac{q_0 - p_0\dfrac{dy_0}{dx_0}}{\sqrt{(1+p_0{}^2+q_0{}^2)}}\,dx = 0,$$

wenn man sich erinnert, daß die von dem Integralzeichen ganz freien Glieder an und für sich verschwinden müssen. Da aber z ungeändert bleibt, wenn man auf jeder der beiden Grenzcurven von einem Punkte zu einem andern übergeht; so ist:

$$p_1 + q_1\frac{dy_1}{dx_1} = 0, \quad p_0 + q_0\frac{dy_0}{dx_0} = 0.$$

Wenn ferner ϱ_1, ϱ_0 resp. die Krümmungshalbmesser dieser beiden Curven bezeichnen, so hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\,\frac{\dfrac{d^2y_1}{dx_1{}^2}}{\left(1+\dfrac{dy_1{}^2}{dx_1{}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{1}{\varrho_0} = -\,\frac{\dfrac{d^2y_0}{dx_0{}^2}}{\left(1+\dfrac{dy_0{}^2}{dx_0{}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituirt man diese Werthe in die zweite und dritte der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{a}{\sqrt{(1+p_1{}^2+q_1{}^2)}} + \frac{m_1}{\varrho_1} = 0, \quad \frac{a}{\sqrt{(1+p_0{}^2+q_0{}^2)}} - \frac{m_0}{\varrho_0} = 0; \qquad \text{(e)}$$

oder wenn θ_1, θ_0 resp. die Winkel bezeichnen, welche die Berührungsebenen in zwei beliebigen Punkten der Grenzcurven mit der Ebene der xy machen:

$$\varrho_1 \cos\theta_1 = -\frac{m_1}{a}, \quad \varrho_0 \cos\theta_0 = \frac{m_0}{a}.$$

Hieraus folgt: daß für jeden Punkt der Grenzlinien die Projection ihres Krümmungshalbmeſſers auf die Berührungsebene der geſuchten Fläche *conſtant* iſt. —

Betrachten wir nun die vierte der Gleichungen (d), nämlich:

$$\int y_0 dx - a \int \frac{q_0 - p_0 \frac{dy_0}{dx_0}}{\sqrt{(1+p_0^2+q_0^2)}} dx = 0, \qquad (f)$$

wo das Integral durch die ganze obere Grenzcurve zu erſtrecken iſt. — Es iſt im Allgemeinen:

$$\iint \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dxdy = -\int \frac{q - p\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} dx, \text{ *)} \qquad (g)$$

wo das doppelte Integral durch den ganzen, von einer gegebenen Curve begrenzten Raum, und das einfache durch den ganzen Umfang der Grenzcurve zu nehmen iſt. — Wenn man alſo auf einer Fläche von *conſtanter mittlerer Krümmung* eine geſchloſſene Curve beſchreibt, und ſtellt das durch den ganzen Umfang derſelben ausgedehnte einfache Integral in (g) durch:

$$\int \frac{q_0 - p_0 \frac{dy_0}{dx_0}}{\sqrt{(1+p_0^2+q_0^2)}} dx$$

dar; ſo hat man:

$$\int \frac{q_0 - p_0 \frac{dy_0}{dx_0}}{\sqrt{(1+p_0^2+q_0^2)}} dx = -\iint \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dxdy = \frac{1}{a} \iint dxdy = \frac{1}{a} \int y dx.$$

Setzt man dieſen Werth in (f), ſo erhält man: $0 = 0$; alſo keine neue Bedingung.

---

*) Wegen des Beweiſes dieſes, ſo viel uns bekannt, von *Laplace* herrührenden Theoremes, vergl. Kap. 10.

Soll aber die obige Schlußweiſe Gültigkeit haben, ſo muß offenbar der auf einer Seite der Ebene der Grenzcurve liegende Theil der Fläche geſchloſſen ſein, weil ſonſt das durch die Gleichung (g) ausgedrückte Theorem nicht ſtattfindet. — Ferner iſt erforderlich: daß ein auf der Ebene der xy errichtetes Perpendikel dieſen Theil der Fläche nur einmal trifft. — Das Nichtſtattfinden dieſer Bedingung würde ebenfalls eine Modification der Gleichung (g) zur Folge haben; aber wenn dieſe Bedingungen erfüllt werden, ſo wird die vierte der Gleichungen (f), wie wir geſehen haben, eine identiſche. — Werden dieſe Bedingungen nicht erfüllt, ſo gibt dieſe Gleichung eine Bedingung zur Beſtimmung einer der in dem Integrale der Gleichung (D) enthaltenen arbiträren Functionen. Wenn man z. B. als eine partikuläre Auflöſung von (D) eine Rotationsfläche um eine zu der Axe der z parallele Gerade nimmt, ſo läßt ſich aus dieſer Gleichung herleiten: daß die geſuchte Fläche eine ſphäriſche iſt.*)

Es wäre jetzt noch der wichtige Fall zu unterſuchen, wo unter allen geſchloſſenen krummen Flächen die gefunden werden ſoll, welche bei demſelben Flächeninhalte das größte Volumen einſchließt. — Dies iſt bekanntlich die Kugelfläche; allein dieſe Löſung hat bis jetzt nicht aus den durch die Variationsrechnung erhaltenen Gleichungen abgeleitet werden können, weil die ſich auf die Integrationsgrenzen beziehenden Glieder von ſelbſt verſchwinden und die allein übrigbleibende Gleichung:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{a},$$

oder deren gleichgeltende, ſich bis jetzt nicht hat allgemein integriren laſſen. — Der Verfaſſer hat aber auf indirekte Weiſe gezeigt: daß die Kugelfläche die einzige krumme Fläche iſt, welche dieſer Gleichung genügt, worüber man Liouville's Journal, Tome XVIII p. 163 vergleichen kann.

*) Da der Fall einer Rotationsfläche ſchon früher (Nr. 76) unterſucht iſt, ſo wird es nicht nöthig ſein, hier nochmals darauf zurückzukommen. — Vergl. Delaunay, p. 116.

Neuntes Kapitel.

Anwendung der Variationsrechnung auf Mechanik.

132. Die Anwendungen der Variationsrechnung auf Mechanik sind von zwei verschiedenen Arten — nämlich: 1) auf Probleme über Maxima und Minima, wobei, wie in den geometrischen Anwendungen der Variationsrechnung, Functionen von veränderlicher Form vorkommen — und 2) auf die Herleitung der Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung materieller Systeme von bekannter Constitution. — Diese letzte Anwendung ist beiweitem die wichtigste, und ist zuerst von Lagrange gemacht worden. — Wir werden nun Beispiele beider Arten von Problemen vornehmen, indem wir mit dem folgenden sehr allgemeinen Falle des berühmten Problemes von der „Brachistochrone" beginnen. —

Aufgabe I.

133. Wenn ein materieller Punkt gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, und die auf ihn wirkenden Kräfte so beschaffen sind, daß der Ausdruck:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

ein genaues Differential wird, die Curve zu finden, längs welcher sich dieser materielle Punkt bewegen muß, um in der kürzesten Zeit von einem Punkte seiner Bahn in irgend einen andern Punkt derselben zu gelangen.

Aufl. Wenn ds das Element des Weges, v die Tangentialgeschwindigkeit und T die Zeit bedeuten; so ist offenbar:

$$T = \int \frac{ds}{v},$$

und außerdem:

$$v^2 = 2\int (Xdx + Ydy + Zdz) = \varphi(x, y, z).$$

Unſere jetzige Aufgabe iſt mithin nur ein ſpecieller Fall der : Nr. 82 behandelten allgemeinen Aufgabe, wenn $\mu = \frac{1}{v}$ geſetzt ird. — Man hat folglich:

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{X}{v^3},$$

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dy} = -\frac{Y}{v^3},$$

$$\frac{d\mu}{dz} = -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dx}{dz} = -\frac{Z}{v^3},$$

nd die erſte der Gleichungen (F) auf S. 200 wird alſo jetzt:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{v^4}(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)^2, \qquad (A)$$

oraus ſich die folgenden allgemeinen Eigenſchaften der geſuchten urve ergeben:

(1). Es ſei R die Reſultante der auf den materiellen Punkt irkenden Kräfte, ω der Winkel, welchen ihre Richtung mit dem erpendikel auf der Ebene des durch die Tangente an der beſchrie- enen Curve gelegten Normalſchnittes der Fläche macht, und θ der Winkel zwiſchen dieſer Ebene und der Krümmungsebene des Weges;) hat man:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\sin^2\theta}{\varrho^2},$$

nd:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = R\cos\omega.$$

etzt man dieſe Werthe in die Gleichung (A), ſo wird ſie:

$$\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2} = \frac{R^2\cos^2\omega}{v^4}, \text{ oder } \frac{v^4}{\varrho^2}\sin^2\theta = R^2\cos^2\omega,$$

er weil beide Seiten dieſer letzten Gleichung daſſelbe Zeichen aben müſſen:

$$\frac{v^2}{\varrho}\sin\theta = R\cos\omega. \ *)$$

*) Wenn dieſe Zeichen verſchieden wären, ſo fände kein Druck auf e beſchriebene Curve ſtatt, und die Bewegung des materiellen Punktes wäre ne freie.

Dieſe Gleichung drückt aus: daß die Componente der Centrifugalkraft nach der auf der Ebene des Normalſchnittes ſenkrechten Richtung, d. h. nach der Tangente des ſenkrechten Durchſchnittes der Fläche, der Componente von R nach derſelben Richtung gleich iſt. — Nun iſt aber der nach irgend welcher Richtung auf die beſchriebene Curve ausgeübte Druck offenbar die Summe der Componenten von R und der Centrifugualkraft nach derſelben Richtung. Wenn alſo der Totaldruck in zwei Componenten zerlegt wird, die eine nach der Normale der krummen Fläche, und die andere nach der Berührungsebene; ſo wird der Werth der letztern ausgedrückt durch:

$$\frac{v^2}{\varrho}\sin\theta + R\cos\omega = 2R\cos\omega.$$

Die auf den materiellen Punkt wirkende Totalkraft kann in drei Componenten zerlegt werden — nämlich: 1) in die nach der Tangente des beſchriebenen Weges, welche allein die Zunahme der Geſchwindigkeit bewirkt; 2) in die nach der Normale der krummen Fläche, welche den Druck auf dieſe Fläche bewirkt, und 3) in die nach einer auf der letzten ſenkrechten Richtung, welche die ſeitlich ablenkende Kraft genannt werden mag, weil ſie in der That der Theil der Totalkraft iſt, welcher den materiellen Punkt ſeitwärts von dem Wege zu entfernen ſtrebt, nach welchem er ſich bewegen muß. — Wir ſind alſo zu dem Reſultate gelangt:

„Wenn ein materieller Punkt auf einer gegebenen Fläche einen ſolchen Weg beſchreiben ſoll, daß er in der **kürzeſten** Zeit von einem Punkte nach einem andern gelangt; ſo iſt die **ſeitlich ablenkende** Kraft oder der **Seitendruck** auf die beſchriebene Curve doppelt ſo groß, als wenn der Punkt in **Ruhe** wäre, d. h. die Tangentialcomponente $= 0$ wäre.“ —

(2). Wenn die Reſultante R in der Ebene des Normalſchnittes liegt, ſo iſt die geſuchte Curve eine geodätiſche Linie. Denn in dieſem Falle iſt:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0,$$

alſo:

$$\varrho = \varrho', \quad \theta = 0;$$

mithin die Krümmungsebene ſenkrecht auf der krummen Fläche; ꝛc.

(3). Wenn blos die Schwerkraft auf den materiellen Punkt irkt, und die Axe der z vertikal angenommen wird; so ist:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g,$$

nd die Gleichung (A) gibt:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{v^4} \cdot g^2 \cos^2\gamma.$$

Ferner ist:

$$v^2 = 2\int(X dx + Y dy + Z dz) = 2g(h - z),$$

wo h die anfängliche Höhe bedeutet. Folglich:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\gamma}{4(h-z)^2}. \qquad (a)$$

Es sei P (Fig. 14) der Ort des materiellen Punktes in irgend einem Moment, PN eine in der Berührungsebene der Fläche liegende Normale des beschriebenen Weges, so weit verlängert, bis sie die durch en Ausgangspunkt der Bewegung gelegte Horizontalebene trifft, und Z ein Perpendikel auf dieser Ebene; so ist:

$$PZ = h - z,$$

nd weil PN offenbar auf der Ebene des Normalschnittes senkrecht ist:

$$NPZ = \gamma.$$

Man hat mithin:

$$h - z = PZ = PN \cdot \cos\gamma,$$

nd wenn dieser Werth in die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\gamma}{4(h-z)^2}$$

esetzt wird; so findet man:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{4PN^2}. \qquad (b)$$

Wenn die Berührungsebene im Punkte P der krummen Fläche orizontal ist, so hat man:

$$PN = \infty, \text{ und } \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = 0,$$

ſo daß die Oskulationsebene der Curve des ſchnellſten Falles in dieſem Punkte mit der einen geodätiſchen Linie zuſammenfällt.

Wenn ferner θ den Winkel bezeichnet, welchen PN mit der Oskulationsebene macht, ſo hat man nach dem Meunier'ſchen Theoreme:

$$\varrho = \varrho' \sin\theta;$$

alſo:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho^2} = \frac{1}{4PN^2}$$

oder:

$$\varrho = 2PN \,.\, \cos\theta; \qquad (c)$$

d. h. in jedem Punkte einer Linie des ſchnellſten Falles auf einer beliebigen krummen Fläche iſt der Krümmungshalbmeſſer doppelt ſo groß, als die Projection der auf die oben angegebene Weiſe gezogenen Normale auf die Oskulationsebene. —

Wenn die gegebene Fläche eine Kugeloberfläche von dem Halbmeſſer $= 1$, und r der ſphäriſche Krümmungshalbmeſſer*) iſt, ſo hat man:

$$\varrho = \sin r, \quad \varrho' = 1, \quad \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \cot^2 r.$$

Es ſei HH' (Fig. 15) der größte Kreis, deſſen Ebene horizontal iſt, und wir wollen annehmen: daß der materielle Punkt von einem Punkte in dem Umfange dieſes Kreiſes ohne anfängliche Geſchwindigkeit ausgeht. Ferner ſei der Pol 0 dieſes Kreiſes der Anfangspunkt der ſphäriſchen Coordinaten, p der Ort des beweglichen Punktes in irgend einem Augenblicke, op der Radiusvector, oq ſenkrecht auf der Tangente, pn die Normale, und:

$$\mu = op, \quad \nu = pn, \quad \pi = oq;$$

ſo iſt offenbar:

$$\cos\gamma = \sin\pi, \quad PN = \tan\nu, \quad h - z = \cos\mu.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung (a), ſo erhält man:

$$\tan r = 2\,\frac{\cos\mu}{\sin\pi}.$$

---

*) Vergl. Graves: Two geometrical Memoirs etc. by M. Chasles. Translatet etc. pp. 93 u. 95.

Nun ist aber:

$$\tan r = -\frac{\sin\mu d\mu}{\cos\pi d\pi},$$

wo das negative Zeichen genommen ist, weil die Curve gegen den Anfangspunkt convex ist; folglich:

$$\tan\mu d\mu = -2\cot\pi d\pi,$$

oder wenn man integrirt:

$$\sin^2\pi = m\cos\mu, \qquad \text{(d)}$$

und aus der Gleichung (b) folgt:

$$\tan r = 2\tan\nu, \qquad \text{(e)}$$

wodurch offenbar eine ähnliche Eigenschaft wie bei der Cycloide ausgedrückt wird. —

(4). Die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft sei eine einzelne Centralkraft, deren Intensität sich wie die n te Potenz der Entfernung ändert; so hat man, wenn das Centrum der Kraft als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird:

$$X = r^{n-1}x, \quad Y = r^{n-1}y, \quad Z = r^{n-1}z,$$

$$v^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{2}{n+1}r^{n-1}. \text{ *)}$$

Substituirt man diese Werthe in (A), so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\left(\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r^2}\right)^2,$$

oder wenn p das Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Ebene des Normalschnittes bedeutet:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\frac{p^2}{r^4}, \qquad \text{(f)}$$

und folglich, wenn θ der spitze Winkel ist, welchen die Oskulationsebene mit der Ebene des Normalschnittes bildet:

$$\frac{\sin\theta}{\varrho} = \frac{\tan\theta}{\varrho'} = \pm\frac{n+1}{2}\frac{p}{r^2}, \qquad \text{(g)}$$

*) Es ist hier der Einfachheit wegen vorausgesetzt, daß die Constante verschwindet, welche Einschränkung sich leicht interpretiren läßt. —

wo das obere, oder das untere Zeichen genommen werden muß, jenachdem die Centralkraft eine repulsive, oder eine attractive ist. —

(5). Wenn allgemein R die Centralkraft bezeichnet, so folgt aus (A):

$$\frac{v^2}{\varrho}\sin\theta = \pm(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma) = \pm R\cos\omega,$$

wo ω der Winkel zwischen R und der in der Berührungsebene gezogenen Normale der Curve ist. — Man hat also:

$$\pm R = \frac{v^2}{\varrho\cos\omega\,\mathrm{cosec}\,\theta}, \qquad \text{(h)}$$

welcher Ausdruck sich leicht wie folgt geometrisch darstellen läßt: Durch den Krümmungsmittelpunkt ziehe man ein Perpendikel auf die Oskulationsebene, und aus dem Punkte, wo dasselbe die Berührungsebene trifft, als Mittelpunkt, beschreibe man durch den Punkt der Curve eine Kugelfläche; so hat man, wenn c die durch den Mittelpunkt der Kraft gehende Sehne dieser Kugelfläche bezeichnet:

$$R = \pm\frac{2v^2}{c}. \qquad \text{(i)}$$

Derselbe Ausdruck ist, wie man sogleich sehen wird, auch bei der Bewegung eines materiellen Punktes anwendbar, welcher sich unter der Wirkung einer Centralkraft auf einer gegebenen Fläche frei bewegen kann. —

(6). Wir haben früher (S. 200) gesehen, daß die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\mu^2}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx} + \cos\beta\frac{d\mu}{dy} + \cos\gamma\frac{d\mu}{dz}\right)^2$$

die Auflösung zweier Aufgaben enthält, nämlich: 1) die Curve zu finden, welche das Integral $\int\mu ds$ zu einem Minimum macht — und: 2) die Curve, welche das Integral $\int\frac{ds}{\mu}$ zu einem Minimum macht. —

Demnach enthält in dem vorliegenden Falle die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{v^4}(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)^2$$

nicht blos die Auflösung des Problemes der Brachistochrone, welche dem Integrale:

$$T = \int \frac{ds}{v}$$

entspricht, sondern auch die Bestimmung des Weges, welchen der materielle Punkt unter der Wirkung gegebener Kräfte beschreibt, wenn derselbe blos gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen. — Denn diese letzte Aufgabe wird (nach dem Principe der kleinsten Wirkung) gelöst, wenn man den Weg des materiellen Punktes so bestimmt: daß das Integral $\int v ds$ ein Minimum wird. — Beide Aufgaben hängen also wie früher (S. 200) zusammen — und man kann daher sagen:

„Der Weg, welchen ein materieller Punkt auf einer gegebenen Fläche unter der Wirkung von Kräften beschreibt, welche den Ausdruck:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

zu einem exacten Differential machen, und die Curve des schnellsten Ueberganges von einem Punkte zu einem andern, werden durch dieselbe Differentialgleichung:

$$\varrho^2 = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)$$

ausgedrückt. —

(7). Wenn der materielle Punkt ganz frei ist, so fällt die Gleichung $u = 0$ auf S. 197 weg, und die Gleichungen (C) auf S. 198 werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx} - \mu\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d\mu}{ds} &= 0,\\ \frac{d\mu}{dy} - \mu\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d\mu}{ds} &= 0,\\ \frac{d\mu}{dz} - \mu\frac{d^2z}{d^2s} - \frac{dz}{ds}\frac{d\mu}{ds} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Es seien α, β, γ die Winkel, welche eine in der Normalebene der Curve beliebig gezogene Gerade l mit den Coordinatenaxen bildet. — Multiplicirt man die vorhergehenden Gleichungen resp. mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addirt die Produkte; so hat man:

$$\cos\alpha\,\frac{d^2x}{ds^2}+\cos\beta\,\frac{d^2y}{ds^2}+\cos\gamma\,\frac{d^2z}{ds^2}=-\frac{1}{\varrho}\cos\omega,$$

wo ω der Winkel zwiſchen dem Krümmungshalbmeſſer ϱ und der Geraden l iſt. — Wegen:

$$\cos\alpha\,\frac{dx}{ds}+\cos\beta\,\frac{dy}{ds}+\cos\gamma\,\frac{dz}{ds}=0$$

hat man alſo allgemein:

$$\frac{\mu}{\varrho}\cos\omega=-\left(\cos\alpha\,\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\,\frac{d\mu}{dy}+\cos\gamma\,\frac{d\mu}{dz}\right),$$

und in dem vorliegenden ſpeciellen Falle, wo $\mu=\frac{1}{v}$ iſt, folglich:

$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\omega=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma=R\cos\omega', \qquad (1)$$

wo ω' der Winkel zwiſchen R und l iſt. — Nun ſei φ der Winkel zwiſchen R und der Normalebene, und η der zwiſchen l und der Projection von R auf dieſe Normalebene; ſo iſt:

$$\cos\omega'=\cos\varphi\cos\eta;$$

folglich:

$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\omega=R\cos\omega'=R\cos\varphi\cos\eta,$$

und da die Linie l ganz willkürlich in der Normalebene gezogen iſt; ſo kann dieſer letzten Gleichung nur genügt werden, wenn man ſetzt:

$$\omega=\eta,\quad \frac{v^2}{\varrho}=R\cos\varphi.$$

Hieraus ſchließen wir:

„Wenn auf einen materiellen Punkt ein Syſtem von Kräften wirkt, welches der Bedingung:

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=d\,\Pi$$

genügt, und der beſchriebene Weg ſo beſchaffen iſt, daß die Zeit des Ueberganges aus einer gegebenen Lage des materiellen Punktes in irgend eine andere ein **Minimum** iſt; ſo fällt der Krümmungshalbmeſſer mit der Pro-

jection der Reſultante R der Kräfte auf die Normalebene zuſammen — und der Druck auf die beſchriebene Curve iſt doppelt ſo groß, als wenn der materielle Punkt durch Aufhebung der Tangentialkraft in Ruhe erhalten würde. —

Wenn z. B. auf den materiellen Punkt nur eine einzelne Centralkraft wirkt, und man nimmt ihren Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten, multiplicirt die erſte der Gleichungen (k) mit y, die zweite mit x, und zieht die Produkte von einander ab; ſo erhält man:

$$y\frac{d\mu}{dx}-x\frac{d\mu}{dy}+\mu\left(x\frac{d^2y}{ds^2}-y\frac{d^2x}{ds^2}\right)+\frac{d\mu}{ds}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=0. \quad \text{(m)}$$

Aber wegen:

$$\frac{d\mu}{dx}=-\frac{X}{v^3},\quad \frac{d\mu}{dy}=-\frac{Y}{x^3}$$

iſt offenbar:

$$y\frac{d\mu}{dx}-x\frac{d\mu}{dy}=0.$$

Die Gleichung (m) wird alſo integrabel, und gibt:

$$\mu\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=c.$$

Ebenſo findet man:

$$\mu\left(z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{ds}\right)=b.$$

Eliminirt man μ und integrirt, ſo findet man:

$$ax+by+cz=0.$$

Die Curve iſt alſo eben, und man hat:

$$\frac{v^2}{\varrho}=R\cos\varphi,$$

wo φ der Winkel zwiſchen der Normale der Curve und dem aus dem Centrum der Kraft gezogene Radiusvector iſt. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$R=\frac{v^2}{\varrho\cos\varphi},$$

welches der bekannte Ausdruck für die Centralkraft in dem Falle einer ungezwungenen Bewegung ist — und aus der vorhergehenden Analyse erhellet: daß dieser Ausdruck auch in dem Falle einer gezwungenen Bewegung anwendbar ist, vorausgesetzt, daß die Curve, welche der bewegliche Punkt beschreiben muß, so beschaffen ist: daß die Zeit des Ueberganges aus einer Lage in irgend eine andere ein Minimum ist. —

Wenn in jedem der obigen Fälle der Weg des materiellen Punktes nicht durch zwei gegebene Punkte, sondern von zwei gegebenen Curven begrenzt wird; so erhellet aus dem Frühern (S. 201), daß die gesuchte Curve diese Grenzcurven rechtwinklig trifft.*)

Beispiel 1.

134. Wir wollen annehmen, daß nur die Schwerkraft auf den materiellen Punkt wirkt, und daß derselbe im Anfange seiner Bewegung eine gegebene Geschwindigkeit habe — und es werde die Curve gesucht, auf welcher er am schnellsten von einer gegebenen Curve zu einer andern herabfällt. —

Es sei h die der anfänglichen Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe, und y_0 die Ordinate des Punktes, von welchem aus die Bewegung anfängt; so hat man, wenn die Axe der positiven y abwärts nach der Richtung der Schwere genommen wird:

$$v^2 = 2g(y - y_0 + h). \qquad \text{(a)}$$

Die Gleichung (I) wird folglich:

$$\frac{2(y - y_0 + h)}{\varrho} = \cos\beta,$$

und wenn der Anfangspunkt um die Länge $y_0 - h$ weiter aufwärts verlegt wird; so gibt die Gleichung (a):

$$\varrho = 2N, \text{ d. h. Krümmungshalb.} = \text{doppelten Normale,}$$

welches eine bekannte Eigenschaft der Cycloide ist, deren Axe mit der Axe der x zusammenfällt. — Die Curve des schnellsten Fal-

*) Die Annahme $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$ würden geben: $v_0 = \infty$, $v_1 = \infty$, und sind folglich unzulässig. —

les ist also bei der alleinigen Wirkung der Schwerkraft die auf der Horizontale, von welcher der materielle Punkt ohne anfängliche Geschwindigkeit ausgehend angenommen werden kann, beschriebene Cycloide. — Was die Grenzbedingungen anlangt, so ist aus dem in Nr. 133 Gesagten klar: daß die Cycloide ihre Begrenzungscurven unter rechten Winkeln schneidet. —

Beispiel 2.

135. Wir wollen ferner annehmen: der materielle Punkt werde gegen einen festen Mittelpunkt angezogen von einer Kraft, deren Intensität sich umgekehrt wie die $n$te Potenz der Entfernung vom Centrum verhält, und daß seine anfängliche Geschwindigkeit der einer unendlich großen Fallhöhe entsprechenden gleich sei; so haben wir in diesem Falle:

$$v^2 = -2\int R dr = \frac{2f}{n-1} r^{-(n-1)},$$

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta = R\cos\varphi = fr^{-(n+1)}(x\cos\alpha + y\cos\beta) = fr^{-(n+1)}p,$$

wo p das Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kraft auf die Tangente bezeichnet. — Substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen auf S. 325 und setzen für ϱ seinen durch r und p ausgedrückten Werth; so erhalten wir:

$$2rdp + (n-1)pdr = 0,$$

woraus sich durch Integration und Beifügung einer willkürlichen Constante ergibt:

$$r^{n-1}p^2 = a^{n+1}.$$

Substituiren wir ferner für p seinen Ausdruck mit r und ω, und setzen:

$$m = \frac{n+1}{2};$$

so bekommen wir:

$$d\omega = a^m \frac{dr}{r\sqrt{(r^{2m} - a^{2m})}},$$

woraus sich endlich als Polargleichung der gesuchten Curve leicht ergibt:

$$r^m \cos m\omega = a^m.$$

Aufgabe II.

136. Die Linie des ſchnellſten Falles zu finden, wenn ſich der materielle Punkt unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft in einem Medium bewegt, deſſen Widerſtand eine gegebene Function der Geſchwindigkeit iſt. —

Aufl. Dieſe Aufgabe iſt offenbar nicht in der vorhergehenden enthalten, weil jedes Syſtem von Kräften, worin der Widerſtand eines Mediums vorkommt, der Bedingung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Pi$$

nicht genügt — und es iſt deshalb eine ſpecielle Behandlung unſerer Aufgabe erforderlich. — Es ſei $\theta = v^2$ und $\ominus = f(\theta)$ die Function, welche den Widerſtand des Mittels ausdrückt. — Wird alsdann wieder wie in Kap. 4 der Bogen s zur independenten Veränderlichen genommen, ſo wird die Zeit ausgedrückt durch:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\theta}},$$

indem die Functionen x, y, θ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} - 1 = 0, \\ L_1 &= \frac{d\theta}{ds} - 2g\frac{dy}{ds} + \ominus = 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

verknüpft ſind, die Axe der y vertikal iſt und die poſitiven Ordinaten abwärts genommen werden. — Man hat folglich nach der Lagrange'ſchen Methode die Gleichung:

$$\int \left(\delta\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1\right) ds = 0; \quad (B)$$

aber:

$$\delta\frac{1}{\sqrt{\theta}} = -\tfrac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}\delta\theta, \quad \delta L = 2\frac{dx}{ds}\frac{d\delta x}{ds} + 2\frac{dy}{ds}\frac{d\delta y}{ds},$$

$$\delta L_1 = \frac{d\delta\theta}{ds} - 2g\frac{d\delta y}{ds} + \frac{d\ominus}{d\theta}\delta\theta.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (B), integrirt die Glieder mit:

$$\frac{d\delta x}{ds}, \quad \frac{d\delta y}{ds}, \quad \frac{d\delta\theta}{ds}$$

theilweiſe, und ſetzt die Coefficienten der Variationen δx, δy, $\delta\vartheta$ einzeln $= 0$; ſo erhält man:

$$\frac{d}{ds} \cdot \lambda \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\frac{d}{ds} \cdot \lambda \frac{dy}{ds} - g \frac{d\lambda_1}{ds} = 0, \tag{C}$$

$$\tfrac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}} + \frac{d\lambda_1}{ds} - \lambda_1 \frac{d\ominus}{d\theta} = 0.$$

Aus den beiden erſten dieſer letzten Gleichungen folgt durch Integration:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = a, \quad \lambda \frac{dy}{ds} - g\lambda_1 = b, \tag{D}$$

und wenn man ſetzt:

$$t = \theta^{-\frac{1}{2}} + \lambda_1 \ominus;$$

ſo ergibt ſich daraus durch Differentiation:

$$\left(\tfrac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}} - \lambda_1 \frac{d\ominus}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{ds} = \ominus \frac{d\lambda_1}{ds} - \frac{dt}{ds},$$

woraus man in Verbindung mit der dritten der Gleichungen (C) findet:

$$\frac{d\lambda_1}{ds}\left(\frac{d\theta}{ds} + \ominus\right) = \frac{dt}{ds},$$

oder wenn man θ mittelſt der Gleichung $L_1 = 0$ eliminirt:

$$2g \frac{d\lambda_1}{ds} \frac{dy}{ds} = \frac{dt}{ds}. \tag{E}$$

Aber wenn man die beiden erſten der Gleichungen (C) reſp. mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ multiplicirt, und die Produkte addirt; ſo bekommt man:

$$g \frac{d\lambda_1}{ds} \frac{dy}{ds} = \frac{d\lambda}{ds},$$

und dies in (E) ſubſtituirt und dann integrirt, gibt:

$$t + c = 2\lambda.$$

Auf ähnliche Art, wie in Kap. 4 Aufg. I iſt leicht zu zeigen, daß die Conſtante c wegfallen muß, wenn die Länge der Curve nicht gegeben iſt. — Denn die Addition einer willkürlichen Conſtante zu t iſt gleichbedeutend mit der Annahme, daß das urſprüngliche Integral ſei:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + c\right) ds.$$

Läßt man alſo c hinweg, und eliminirt λ mittelſt der Gleichung:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = a,$$

ſo erhält man:

$$(\theta^{-\frac{1}{2}} - \lambda_1 \ominus) \frac{dx}{ds} = 2a,$$

oder wenn man λ_1 mittelſt der zweiten der Gleichungen (D) eliminirt:

$$\left(\theta^{-\frac{1}{2}} - \frac{b}{g}\ominus\right)\frac{dx}{ds} + \frac{a}{g}\ominus\frac{dy}{ds} = 2a. \qquad \text{(F)}$$

Eliminirt man weiter $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ zwiſchen (A) und (F), ſo findet man:

$$\left(\theta^{-\frac{1}{2}} - \frac{b}{g}\ominus\right)^2\left\{1 - \frac{1}{4q^2}\left(\frac{d\theta}{ds} + \ominus\right)^2\right\}$$

$$- a^2\left\{2 - \frac{1}{2g^2}\left(\frac{d\theta}{ds} + \ominus\right)\ominus\right\}^2 = 0. \qquad \text{(G)}$$

Dieſe letzte Gleichung beſtimmt θ als Function von s, und wenn der ſo gefundene Werth von θ in die zweite der Gleichungen (A) geſetzt wird; ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen y und s, welche die der geſuchten Curve iſt. —

Wenn kein Widerſtand des Mittels ſtattfindet, ſo iſt $\ominus = 0$, und die Gleichungen $L_1 = 0$ und (G) werden:

$$\frac{d\theta}{ds} - 2g\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{4g^2}\frac{d\theta^2}{ds^2}\right) - 4a^2 = 0.$$

Durch Integration der erſten dieſer Gleichungen ergibt ſich:

$$\theta - 2gy = c,$$

und wenn man θ zwiſchen den beiden letzten Gleichungen eliminirt; ſo erhält man wieder die Gleichung der Cycloide:

$$\frac{dy}{ds} = 2a\sqrt{\left(\frac{1}{4a^2} - 2gy - c\right)}.$$

Aufgabe III.

137. Was für eine Curve muß ein an ſeinen Endpunkten befeſtigter vollkommen biegſamer und unausdehnbarer Faden von veränderlicher Dicke bilden, damit ſein Schwerpunkt am tiefſten liegt?

Aufl. Da der Faden als unausdehnbar vorausgeſetzt wird, ſo iſt ſeine Dicke an irgend einer Stelle offenbar eine gegebene Function des Bogens s, welche mit S bezeichnet werden mag. Alsdann wird der Abſtand ſeines Schwerpunktes von der Axe der x ausgedrückt durch:

$$\frac{\int ySds}{\int Sds}.$$

Weil aber die in dieſem Ausdrucke vorkommenden Integrale durch die ganze Länge des Fadens erſtreckt werden müſſen, ſo iſt offenbar $\int Sds$ = dem Volumen des Fadens = const. und das zu einem Minimum zu machende Integral iſt mithin:

$$\int ySds.$$

Behandelt man dieſes Integral nach der in Kap. 4 angegebenen Methode, ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\frac{d}{ds}.\lambda\frac{dx}{ds} &= 0, \\ 2\,\frac{d}{ds}.\lambda\frac{dy}{ds} - S &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Integrirt man dieſe Gleichungen, und ſetzt:

$$S_1 = \int Sds,$$

ſo erhält man:

$$2\lambda \frac{dx}{ds} = a,$$

$$2\lambda \frac{dy}{ds} - S_1 = b, \qquad \text{(B)}$$

woraus folgt:

$$2\lambda = \sqrt{\{a^2 + (b + S_1)^2\}}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die Gleichungen (B) und integrirt, ſo bekommt man:

$$x + c = \int \frac{a\,ds}{\sqrt{\{a^2 + (b + S_1)^2\}}},$$

$$y + d = \int \frac{(b + S_1)\,ds}{\sqrt{\{a^2 + (b + S_1)^2\}}}, \qquad \text{(C)}$$

und wenn man endlich s zwiſchen dieſen beiden letzten Gleichungen eliminirt; ſo bekommt man die Gleichung der geſuchten Curve, welche offenbar vier willkürliche Conſtanten enthält, wovon zwei durch die gegebene Lage der Endpunkte des Fadens beſtimmt werden, die dritte durch ſeine Länge, und endlich die vierte durch die Vorausſetzung, daß der zur independenten Veränderlichen genommene Bogen s von dem einen Ende der Curve aus gezählt wird. — Dieſe letzte Conſtante verſchwindet offenbar bei der Elimination von s. — Wenn der Faden von conſtanter Dicke iſt, ſo hat man:

$$S = 1, \quad S_1 = s.$$

Setzt man dieſe Werthe in (C) und verrichtet die Integrationen, ſo findet man:

$$x + c = al\left[\frac{s + b}{a} + \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{s + b}{a}\right)^2\right\}}\right],$$

$$y + d = a\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{s + b}{a}\right)^2\right\}},$$

oder wenn man s eliminirt:

$$x + c = al\left[\frac{y + d}{a} + \sqrt{\left\{\left(\frac{y + d}{a}\right)^2 - 1\right\}}\right],$$

d. h. die Gleichung der Kettenlinie. —

Wenn die Endpunkte des Fadens nicht fest liegen, sondern nur auf zwei gegebenen Curven:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0$$

bleiben müssen; so geben die von dem Integralzeichen freien Glieder die Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 = 0,$$

indem die Variationen δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 durch die Gleichungen:

$$\frac{du_0}{dx_0}\delta x_0 + \frac{du_0}{dy_0}\delta y_0 = 0, \quad \frac{du_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{du_1}{dy_1}\delta y_1 = 0$$

verknüpft sind. — Man hat demnach die Gleichungen:

$$\frac{du_0}{dx_0}\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 - \frac{du_0}{dy_0}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 0, \quad \frac{du_1}{dx_1}\left(\frac{dy}{ds}\right)_1 - \frac{du_1}{dy_1}\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 = 0,$$

welche zeigen, daß die gesuchte Curve ihre Grenzcurven rechtwinklig schneidet.

Die in dieser Aufgabe bestimmte Form des Fadens ist nach mechanischen Lehren keine andere, als die, welche er unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft im Gleichgewichtszustande annimmt. —

Aufgabe. IV.

138. Wenn der Faden in der vorigen Aufgabe auf eine gegebene Fläche gelegt wird, seine Gleichgewichtslage zu bestimmen.

Aufl. Die Axe der z sei vertikal, und die Gleichung der gegebenen Fläche:

$$u = 0,$$

so gibt die Lagrange'sche Methode wie in Kap. 4, Aufg. 5 offenbar die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda' \frac{du}{dx} - \frac{d}{ds} \cdot \lambda \frac{dx}{ds} &= 0, \\ \lambda' \frac{du}{dy} - \frac{d}{ds} \cdot \lambda \frac{dy}{ds} &= 0, \\ \lambda' \frac{du}{dz} - \frac{d}{ds} \cdot \lambda \frac{dz}{ds} + S &= 0. \end{aligned} \qquad (A)$$

Multiplicirt man dieſelben reſp. mit:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

und addirt die Produkte; ſo findet man:

$$\frac{d\lambda}{ds} = S, \text{ alſo } \lambda = S_1 + a.$$

Bezeichnet man ferner mit α, β, γ die Winkel, welche die Ebene des die Curve berührenden Normalſchnittes mit den Coordinatenebenen macht, und verfährt wie früher (Nr. 82); ſo findet man ſehr leicht für die Gleichung der geſuchten Curve:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{S^2 \cos^2\gamma}{(S_1+a)^2}. \qquad \text{(B)}$$

Wenn die Endpunkte des Fadens nicht feſt liegen, ſondern nur auf gegebenen Curven liegen müſſen; ſo iſt leicht einzuſehen, daß die Fadencurve die Grenzcurven rechtwinklig ſchneiden muß. —

Aufgabe V.

139. Die Form der elaſtiſchen Curve zu finden, d. h. die Gleichgewichtsform einer elaſtiſchen Feder, deren Endpunkte gegeben ſind, oder auf zwei gegebenen Curven liegen müſſen, und worauf keine äußere Kraft wirkt. —

Aufl. Nach dem Principe von Daniel Bernouilli kann die elaſtiſche Curve als die definirt werden, welche das auf ihre ganze Länge erſtreckte Integral:

$$\int \frac{ds}{\varrho^2}$$

zu einem Minimum macht. — Die vorliegende Aufgabe iſt alſo nur ein ſpecieller Fall von der in Kap. 4 unterſuchten allgemeinen Aufg. 4, wenn man ſetzt:

$$\mu = \frac{1}{\varrho^2}, \quad \mu' = -\frac{2}{\varrho^3}.$$

(1). Es ſeien die Endpunkte gegeben, und die ſie verbindende Gerade die Axe der x, ſo wird die Gleichung (E) auf S. 186, wenn man $-\frac{4}{b^2}$ für a ſetzt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2y}{b^2}.$$

Es iſt alſo:

$$Y = \frac{2y}{b^2}, \quad Y_1 = \frac{y^2}{b^2},$$

und wenn man dieſe Werthe in die Gleichung (F) ſetzt; ſo erhält man:

$$x + f = \int \frac{\left(\frac{y^2}{b^2} + e\right) dy}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{y^2}{b^2} + e\right)^2\right\}}} \qquad (A)$$

als die Gleichung der elaſtiſchen Curve, wenn die Lage der Grenztangenten nicht gegeben iſt.

Wenn die Lage der Grenztangenten in derſelben Ebene gegeben iſt, ſo muß man die allgemeine Gleichung (C) auf S. 185, nämlich:

$$\mu' \varrho^2 = ay - bx + c$$

anwenden; aber da dieſe Gleichung immer durch eine Coordinatenverwandlung auf die Form (E) gebracht werden kann, ſo iſt klar, daß die elaſtiſche Curve in allen Fällen durch die Gleichung (A) ausgedrückt werden kann, indem die Lage der Coordinatenaxen von der gegebenen Lage der Grenztangenten abhängt. — Wenn eine allgemeine, keine beſondere Lage der Axen erfordernde Auflöſung verlangt wird; ſo ergibt ſich dieſelbe unmittelbar durch eine Coordinatenverwandlung aus (A), läßt ſich aber auch leicht aus der allgemeinen Gleichung (C) auf folgende Art herleiten:

Wenn man in die Gleichung (C) für μ' ſeinen Werth $-\frac{2}{\varrho^3}$ ſetzt, ſo erhält man:

$$-\frac{2}{\varrho} = ay - bx + c,$$

oder wenn man für $\frac{1}{\varrho}$ ſeinen Werth:

$$-(1+p^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{pdp}{dy}$$

ſubſtituirt und nach y integrirt; ſo findet man:

$$\frac{2}{\sqrt{(1+p^2)}} = \tfrac{1}{2}ay^2 - b\int x\,dy + cy + c'.$$

Setzt man weiter für $\frac{1}{\varrho}$ seinen Werth:

$$-(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{dp}{dx},$$

und integrirt nach x, so ergibt sich:

$$\frac{2p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \tfrac{1}{2}bx^2 - a\int y\,dx - cx + c'',$$
$$= \tfrac{1}{2}bx^2 - axy + a\int x\,dy - cx + c''.$$

Eliminirt man ferner $\int x\,dy$ und ordnet, so hat man:

$$\frac{4(a+bp)}{\sqrt{(1+p^2)}} = (ay - bx + c)^2 + e, \qquad \text{(B)}$$

wo:

$$e = 2ac' + 2bc'' - c^2$$

ist. — Hieraus sieht man, daß die allgemeine Auflösung fünf willkürliche Constanten enthält, wovon vier durch die Bedingungen bestimmt werden, welche an den Grenzpunkten erfüllt werden müssen, und die fünfte wird durch die gegebene Länge der elastischen Feder bestimmt. —

Wenn die Endpunkte der elastischen Curve blos auf zwei gegebenen Curven bleiben müssen, so erhellet aus früher (S. 188) Gesagtem: daß die Verbindungsgerade dieser Punkte auf den Tangenten der Grenzcurven in denselben senkrecht ist.

Nehmen wir endlich an, daß die elastische Feder so beschaffen ist, daß sie die beiden Grenzcurven berührt; so sind die allgemeinen Gleichungen für die Auflösung dieses Falles [S. 190, Gl. (h)]:

$$a + b\left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 - (ay_1 - bx_1 + c)\left(\frac{d^2f_1}{dx^2}\right)_1\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_1 = 0,$$
$$a + b\left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 - (ay_0 - bx_0 + c)\left(\frac{d^2f_0}{dx^2}\right)_0\left(\frac{dx^2}{ds^2}\right)_0 = 0, \qquad \text{(C)}$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen:

$$y_1 = f_1(x_1),\quad y_0 = f_0(x_0),\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_1,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 \ldots$$

zur Bestimmung von vier der fünf willkürlichen Constanten a, b, c, e, f genügen, und die fünfte wird durch die gegebene Länge der elastischen Feder bestimmt. — Gesetzt z. B. die Begrenzungslinien wären Gerade:

$$y = mx + p,$$
$$y = nx + q,$$

so hat man:

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)_1 = m, \quad \left(\frac{df_0}{dx}\right)_0 = n, \quad \left(\frac{d^2f_1}{dx^2}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2f_0}{dx^2}\right)_0 = 0.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (C), so erhält man:

$$a + mb = 0, \quad a + nb = 0,$$

oder, wenn die Geraden nicht parallel sind:

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Die allgemeine Gleichung (C) auf S. 185 wird also jetzt:

$$\varrho = \text{const.},$$

d. h. die elastische Curve ist in diesem Falle ein Kreis. —

Aufgabe VI.

140. Welche Form muß ein Rotationskörper von einem gegebenen Volumen haben, damit die Anziehung, welche derselbe auf einen in seiner Axe liegenden materiellen Punkt ausübt, ein Maximum wird? —

Aufl. Wenn die Drehungsaxe zur Axe der x genommen, und der Körper durch Ebenen, welche auf dieser Geraden senkrecht stehen, in unendlich viele unendliche dünne Scheiben getheilt wird; so wird die von einer solchen Scheibe ausgeübte Anziehung ausgedrückt durch:

$$2\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}\right)dx,$$

und mithin die des ganzen Körpers durch:

$$2\pi\int\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}\right)dx.$$

Das Volumen des Rotationskörpers wird aber bekanntlich ausgedrückt durch:

$$\pi\int y^2 dx,$$

und mithin ist in dem zu einem Maximum zu machenden Integrale:

$$\int V dx,$$

offenbar:

$$V = 1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + ay^2,$$

wo a eine unbestimmte Constante ist. —

Die Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \&c. = 0$$

auf S. 44 reducirt sich also auf $N = 0$, oder:

$$\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + 2ag = 0. \qquad (A)$$

Da die Annahme $y = 0$ unzulässig ist, so hat man für die Gleichung der Erzeugungscurve:

$$x + 2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

wo die Constante a durch das gegebene Volumen des Körpers bestimmt wird. —

Aufgabe VII.

141. Wenn die Größe einer anziehenden Fläche gegeben ist, die Form derselben so zu bestimmen: daß ihr Potential in Bezug auf einen gegebenen Punkt ein Maximum wird. —

Aufl. Wenn der gegebene Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen, und das Attractionsgesetz durch $\psi(r)$ ausgedrückt wird; so ist das Potential der anziehenden Fläche:

$$\iint \varphi(r) dS,$$

wo dS das Flächenelement, und:

$$\varphi(r) = -\int \psi(r) dr$$

ist. Da die Größe der Fläche gegeben ist, so ist das zu einem absoluten Maximum zu machende Integral:

$$\iint \{\varphi(r) + a\}\, dS.$$

Unſere jetzige Aufgabe iſt alſo blos ein ſpecieller Fall von Aufg. I in Kap. 8, indem jetzt:

$$\mu = \varphi(r) + a,\ \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r},\ \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{y}{r},\ \frac{d\mu}{dz} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{z}{r}$$

iſt. Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung (B) auf S. 308 und ſetzt für $\frac{d\varphi}{dr}$ ſeinen Werth $-\psi(r)$, ſo findet man:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\psi(r)}{\varphi(r) + a}\left(\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r}\right), \qquad (A)$$

oder wenn P das aus dem Anfangspunkte auf die Berührungsebene gefällte Perpendikel bezeichnet:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{P}{r} \cdot \frac{\psi(r)}{\varphi(r) + a}. \qquad (B)$$

Wenn der betrachtete Theil der geſuchten Fläche von zwei gegebenen Flächen begrenzt wird, ſo ſchneidet erſtere die letzteren unter rechten Winkeln, wenn nicht:

$$\varphi(r_1) + a = 0 \qquad (C)$$

und nicht:

$$\varphi(r_0) + a = 0 \qquad (D)$$

iſt (S. 306). Aus den Gleichungen (C) und (D) ſieht man: daß die Grenzcurven der verſchiedenen Flächen, welche die Aufgabe löſen, auf Kugeln liegen, deren Mittelpunkt der anziehende Punkt iſt, und deren Halbmeſſer die verſchiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi(r) + a = 0$$

ſind. —

Beiſpiel.

142. Es ſei:

$$\psi(r) = r^n,$$

ſo iſt:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{n+1} r^{n+1}.$$

Setzt man dieſe Werthe in (B), ſo findet man:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{Pr^{n-1}}{a-\frac{r^{n+1}}{n+1}},$$

und die Gleichungen (C) und (D) werden in derſelben Vorausſetzung:

$$r_1^{n+1}=(n+1)a=r_0^{n+1}.$$

Die beiden Grenzcurven liegen alſo auf derſelben Kugel, und die allgemeine Gleichung (B) gibt für jede dieſer Curven:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\infty, \quad \text{oder } P=0,$$

d. h. die Curve iſt entweder eine ſinguläre, oder die Berührungscurve des umſchriebenen Kegels. — Es iſt aber leicht einzuſehen, daß die Annahmen:

$$\mu_1=0, \quad \mu_0=0$$

im Allgemeinen kein wirkliches Maximum geben. — Denn wenn ein Maximum, oder ein Minimum ſtattfinden ſoll, ſo darf die Größe:

$$\frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2+2\frac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q+\frac{d^2V}{dq^2}\delta q^2$$

innerhalb der Integrationsgrenzen ihr Zeichen nicht ändern (Nr. 123). Wenn aber:

$$V=\mu\sqrt{(1+p^2+q^2)}$$

iſt, ſo hat man:

$$\frac{d^2V}{dp^2}=\frac{\mu(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2V}{dpdq}=-\frac{\mu pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2V}{dq^2}+\frac{\mu(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und folglich:

$$\frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2+2\frac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q+\frac{d^2V}{dq^2}\delta q^2$$

$$=\mu\frac{(1+q^2)\delta p^2-2pq\delta p\delta q+(1+p^2)\delta q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\mu\frac{\delta p^2+\delta q^2+(q\delta p-p\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieſe Größe hat aber offenbar daſſelbe Zeichen als μ, und wenn folglich μ keine Function iſt, welche durch Null geht, ohne ihr Zeichen zu ändern; ſo iſt die Annahme: daß μ zwiſchen den Integrationsgrenzen verſchwindet, offenbar unzuläſſig. — Man muß deshalb im Allgemeinen die andere Vorausſetzung zulaſſen, nämlich: daß die geſuchte Fläche ihre Grenzflächen unter rechten Winkeln ſchneidet. —

Anwendung der Variationsrechnung auf die Herleitung der Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung.

143. Die bisherigen Anwendungen der Variationsrechnung entſprechen genau der in Kap. 1 gegebenen Definition dieſer Wiſſenſchaft. So lange die betrachteten Incremente von rein mathematiſcher Natur ſind, kann ſich der Werth einer Function offenbar nur auf zwei verſchiedene Weiſen ändern, nämlich entweder in Folge einer Werthsänderung einer, oder mehrerer ihrer independenten Veränderlichen, oder in Folge einer Formänderung der Function. — Nur die von Formänderungen herrührenden Werthsänderungen einer Function müßten mit dem Buchſtaben δ angedeutet werden, wogegen das Increment einer independenten Veränderlichen x ebenſowohl mit dx, wie mit δx bezeichnet werden könnte, weil eine independente Veränderliche in einem rein mathematiſchen Sinne nur eine Art von Incrementen haben kann. — Dieſes ändert ſich aber weſentlich durch Einführung des mechaniſchen Begriffes der Bewegung. — Das Zeichen δ deutet alsdann kein von einer Formänderung herrührendes Increment mehr an, ſondern ein Increment, welches von einer Aenderung der Lage in Folge der Bewegung eines materiellen Theilchens aus einem Punkte des Raumes in einen andern herrührt. Es iſt alſo das mit δ bezeichnete Increment keine eigentliche Variation in dem bisherigen Sinne, ſondern eine Verrückung — und dennoch müſſen beide Arten von Variationen im Allgemeinen nach denſelben, früher entwickelten Regeln behandelt werden, obgleich ſie ihrem Grundbegriffe nach weſentlich verſchieden ſind. — Die rein mathematiſche Wiſſenſchaft der Variationsrechnung iſt aber dadurch ſehr verdunkelt worden, daß man Principien in dieſelbe eingeführt hat, welche ſich eigentlich nur auf die mechaniſchen Wiſſenſchaften beziehen. — Wir haben deshalb zunächſt zu unterſuchen, ob und in wie weit dieſer Unterſchied

im Grundbegriffe der Variation eine Aenderung in den bisher entwickelten Regeln der Rechnung bewirkt. — Zuerst ist zu bemerken: daß die Zeichen δ und d nicht mehr identisch sind, wenn sie auf independente Veränderliche angewandt werden; denn das letzte bezeichnet den unendlich kleinen gegenseitigen Abstand zweier verschiedener Molekule, während das erste die unendlich kleine Verrückung desselben Molekules andeutet. — Ferner haben wir in der rein mathematischen, oder besser gesagt, geometrischen Abtheilung der Variationsrechnung nicht nöthig gehabt, Ausdrücke wie:

$$\delta.dx, \quad \delta.dxdy, \quad \delta.dxdydz, \quad \&c.,$$

anzuwenden, weil die Größen, welche wir bisher zu untersuchen hatten, nicht einzelne Elemente, sondern Aggregate solcher Elemente, d. h. Integrale waren. — Z. B. bei der Bestimmung der Variation eines bestimmten Integrales, wie:

$$\iiint V dxdydz,$$

würde es offenbar sinnlos sein, von der Variation des Elementes $dxdydz$ zu reden, weil der Werth dieses Integrales in keiner Weise von diesem Elemente, sondern lediglich von den Integrationsgrenzen und von der Form der zu integrirenden Function V abhängt. —

Aber bei der Aufsuchung der Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung eines stetigen Systemes kann die Variation eines solchen Elementes, d. h. die Aenderung seiner geometrischen Größe in Folge der Verrückung der dasselbe bildenden Molekule, nicht unberücksichtigt bleiben. — Wir werden finden, daß Variationen dieser Art in mechanische Probleme auf zweierlei Weise eingeführt werden, nämlich: 1) durch die Natur der Molekularkräfte, und 2) durch die Natur der in continuirlichen Systemen stattfindenden Bedingungsgleichungen.

Unter Moment einer Kraft versteht man nach Lagrange das Produkt aus dieser Kraft und der Wirkung, welche sie hervorzubringen strebt. — Wenn also F die Kraft, ω die Größe, welche sie zu ändern strebt, und $\delta\omega$ die virtuelle Aenderung derselben bedeuten; so wird das Moment dieser Kraft ausgedrückt durch:

$$F.\delta\omega.$$

Gewisse Kräfte — z. B. die der Elasticität — werden durch

die Aenderung definirt, welche ſie in einem Elemente des betrachteten ſtetigen Syſtemes hervorzubringen ſtreben — und können nicht adäquat durch die Aenderung in einem endlichen Theile dieſes Syſtemes definirt werden. — Obgleich z. B. die Elaſticität auch die Größe eines endlichen Theiles des Syſtemes zu ändern ſtrebt, ſo kann ſie doch nicht adäquat durch eine ſolche Aenderung definirt werden, weil dieſelbe Wirkung auch durch andere, ihrer Natur nach von der Elaſticität ganz verſchiedene Kräfte hervorgebracht werden kann — z. B. durch Kräfte, deren Wirkung ſich blos auf gewiſſe Regionen des fraglichen endlichen Theiles des Syſtemes beſchränken — während das Weſen der Elaſticität darin beſteht: daß ſie in jedem Elemente des Syſtemes wirkt. — Hieraus ſieht man alſo, daß in dem mathematiſchen Ausdrucke des Momentes einer Kraft — z. B. der Elaſticität — die Variation eines Elementes in dem vorhin angegebenen Sinne vorkommen muß. —

Ebenſo kann es vorkommen, daß eine der Bedingungen des Syſtemes nicht anders, als durch eine Gleichung mit unendlich kleinen Elementen ausgedrückt werden kann. — So läßt ſich z. B. die Nichtzuſammendrückbarkeit einer Flüſſigkeit nur durch eine Gleichung von der Form:

$$dm = \text{const.}$$

ausdrücken; dem eine Gleichung wie:

$$M = \text{const.},$$

wo M ein endlicher Theil der Flüſſigkeit iſt, würde nicht ausdrücken, daß letztere unzuſammendrückbar iſt, ſondern nur: daß die Zuſammendrückung eines Theiles von M der Ausdehnung des andern Theiles gleich iſt. — Da nun die Anwendung der Lagrange'ſchen Methode die Variation von Bedingungsgleichungen erfordert, ſo iſt klar: daß, wenn eine dieſer Gleichungen von der obigen Form iſt, ihre Variation die Variation eines Elementes enthalten wird. —

Wir wollen nun eine Variation, welche von einer Verrückung von Punkten, ꝛc. herrührt, zur Unterſcheidung eine „mechaniſche" Variation nennen — und unſere nächſte Aufgabe wird darin beſtehen: die mechaniſche Variation eines Elementes zu finden. — Aber es iſt bei der Anwendung der Lagrange'ſchen Principien auf die Beſtimmung der Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung ſtetiger Syſteme oft auch erforderlich, die mechaniſche Va-

riation ähnlicher Functionen, wie die früher betrachteten zu bestimmen. — Wenn z. B. ξ, η, ζ die wirklichen Verrückungen eines Molekules in einem stetigen Systeme sind, und es ist:

$$V = f\left(x, y, z, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \frac{d\xi}{dz}, \frac{d\eta}{dx} \cdots \frac{d\zeta}{dx} \cdots\right),$$

so ist oft erforderlich, die mechanische Variation von V zu suchen, d. h. die Variation, welche V in Folge einer virtuellen Verrückung dieses Molekules erfährt. — Wir haben deshalb hier auch zu untersuchen: ob und in wie weit diese mechanischen Variationen mit den bisher betrachteten identisch sind. —

Aufgabe VIII.

144. Die mechanische Variation des Elementes:

$$dxdydz$$

zu finden, d. h. die Volumenänderung des unendlich kleinen parallelepipedischen Elementes eines stetigen Körpers, welche von der Verrückung seiner Molekule herrührt. —

Aufl. Es seien x, y, z die Coordinaten eines Molekules des Körpers vor seiner Verrückung, und:

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta$$

die nach derselben; so setzt sich die Totalverrückung des Molekules zusammen aus den zu den Axen der x, y, z resp. parallelen Partialverrückungen ξ, η, ζ. — Soll aber auf ein Problem wie das vorliegende die mathematische Rechnung anwendbar sein, so muß offenbar vorausgesetzt werden: daß die Verrückung nach einem bestimmten Gesetze geschieht, so daß die neue Lage jedes Molekules mit der ursprünglichen durch eine bestimmte Relation verknüpft ist. — Wir nehmen deshalb an, daß jede der Größen ξ, η, ζ eine Function der Coordinaten x, y, z ist. —

Es sei $ABCD$ (Fig. 16) eine der Flächen des Parallelepipedums $dxdydz$, z. B. die Fläche $dxdy$; so sind die Coordinaten der vier Eckpunkte offenbar:

$$A, x, y, z, \qquad B, x + dx, y, z,$$
$$C, x, y, + dy, z, \quad D, x + dx, y + dy, z,$$

Werden nun die Molekule verrückt, und ist $A'B'C'D'$ die neue Lage von $ABCD$; so sind die Coordinaten der Punkte A', B', C', D':

$$A',\ x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta.$$

$$B',\ x+dx+\xi+\frac{d\xi}{dx}dx,\ y+\eta+\frac{d\eta}{dx}dx,\ z+\zeta+\frac{d\zeta}{dx}dx.$$

$$C',\ x+\xi+\frac{d\xi}{dy}dy,\ y+dy+\eta+\frac{d\eta}{dy}dy,\ z+\zeta+\frac{d\zeta}{dy}dy. \tag{A}$$

$$D',\ x+dx+\xi+\frac{d\xi}{dx}dx+\frac{d\xi}{dy}dy,\ y+dy+\eta+\frac{d\eta}{dx}dx+\frac{d\eta}{dy}dy,$$

$$z+\zeta+\frac{d\zeta}{dx}dx+\frac{d\zeta}{dy}dy.$$

Demnach ist offenbar:

$$A'B'=dx\sqrt{\left\{\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\frac{d\eta^2}{dx^2}+\frac{d\zeta^2}{dz^2}\right\}}=C'D'.$$

$$A'C'=dy\sqrt{\left\{\frac{d\xi^2}{dy^2}+\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)^2+\frac{d\zeta^2}{dy^2}\right\}}=B'D'. \tag{B}$$

Die Figur $A'B'C'D'$ ist also ein Parallelogramm, und wenn unendlich kleine Größen zweiter Ordnung unbeachtet bleiben; so hat man:

$$A'B'=\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)dx,\quad A'C'=\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)dy.$$

Wenn man in Bezug auf die andern Flächen des Parallelepipedums $dxdydz$ ebenso verfährt, so findet man leicht, daß dasselbe auch nach der Verrückung der Molekule noch ein Parallelepipedum bleibt, dessen drei Kanten durch:

$$\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)dx,\quad \left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)dy,\quad \left(1+\frac{d\zeta}{dz}\right)dz$$

ausgedrückt werden — und das Produkt derselben ist, wenn die unendlich kleinen Größen der höhern Ordnungen weggelassen werden:

$$\left(1+\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)dxdydz. \tag{C}$$

Um die Aenderung des Winkels zwiſchen zwei zuſammenſtoßenden Kanten AB, AC zu finden, wollen wir den Winkel $B'A'C = \gamma'$ ſetzen; ſo iſt:

$$2A'B' \cdot A'C' \cos\gamma' = A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2. \qquad (D)$$

Aber aus (A) folgt:

$$B'C'^2 = \left\{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)dx - \frac{d\xi}{dy}\,dy\right\}^2$$

$$+ \left\{\left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right)dy - \frac{d\eta}{dx}\,dx\right\}^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\,dx - \frac{d\zeta}{dy}\,dy\right)^2,$$

und wenn man die Werthe von $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ in (D) ſubſtituirt; ſo erhält man mit Hinweglaſſung unendlich kleiner Größen höherer Ordnungen:

$$\cos\gamma' = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx},$$

und ebenſo findet man:

$$\cos\beta' = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz},$$

$$\cos\alpha' = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}.$$

Dieſe Ausdrücke zeigen: daß die Winkel des neuen Parallelepipedums unendlich wenig von rechten Winkeln verſchieden ſind, und daß mithin das Volumen deſſelben von (C) nur um eine unendlich kleine Größe verſchieden iſt, die von einer höhern Ordnung iſt, als irgend eins der in dieſem Ausdrücke vorkommenden Glieder. — Hieraus erhellet, daß die Variation von $dxdydz$ iſt:

$$\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)dxdydz.$$

Wenn die Verrückungen virtuelle ſind, welche mit δ bezeichnet zu werden pflegen; ſo haben wir:

$$\delta \cdot dxdydz = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)dxdydz.$$

Der Gleichförmigkeit wegen werden wir ſolche virtuelle Verrückungen

ausſchließlich mit δ andeuten, dagegen die wirklichen mit ξ, η, ζ bezeichnen. —

Aufgabe IX.

145. Man ſoll die mechaniſche Variation von:

$$V = f\left(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \text{&c.}, \frac{d\eta}{dx}, \text{&c.}, \frac{d\zeta}{dx}, \text{&c.}\right)$$

finden.

Aufl. Wenn wir wieder annehmen, daß die Verrückungen nach einem beſtimmten Geſetze geſchehen, ſo daß ξ, η, ζ Functionen von x, y, z ſind; ſo iſt unmittelbar einleuchtend, daß ſich V nur auf zwei Arten ändern kann — nämlich: 1) in Folge der Werthsänderung irgend einer der Größen x, y, z, und 2) in Folge einer Formänderung irgend welcher der Functionen ξ, η, ζ. — Die Veränderlichen x, y, z können, wie ſchon bemerkt, zwei Arten von Incrementen bekommen — nämlich: dx, dy, dz, welche ſich auf den gegenſeitigen Abſtand zweier verſchiedener Punkte oder Molekule beziehen — und: 2) δx, δy, δz, welche ſich auf die Verrückung deſſelben Punktes oder Molekules beziehen. — Die erſte Art von Incrementen wird bei der vorliegenden Aufgabe ſchon durch die Bedeutung des Wortes „Variation" ausgeſchloſſen, welches immer eine Aenderung andeutet, die ſich auf daſſelbe Molekul bezieht.

Man hat daher nach den in Kap. 1 aufgeſtellten Sätzen:

$$\delta V = \left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{df}{d.\frac{d\xi}{dx}}\frac{d^2\xi}{dx^2} + \text{&c.} + \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} + \text{&c.}\right)\delta x$$

$$+ \left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dy} + \text{&c.}\right)\delta y + \left(\frac{df}{dz} + \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} + \text{&c.}\right)\delta z$$

$$+ \frac{df}{d\xi}\delta\xi + \frac{df}{d.\frac{d\xi}{dx}}\frac{d\delta\xi}{dx} + \text{&c.}$$

$$+ \frac{df}{d\eta}\delta\eta + \text{&c.} + \frac{df}{d\zeta}\delta\zeta + \text{&c.},$$

oder kürzer ausgedrückt:

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z$$

$$+ \frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d.\frac{d\xi}{dx}}\,\frac{d\delta\xi}{dx} + \&c., \qquad (A)$$

wo:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right),\ \left(\frac{dV}{dy}\right),\ \left(\frac{dV}{dz}\right)$$

wieder die vollſtändigen oder totalen Differentialquotienten bedeuten, indem V ſowohl als eine explicite, wie implicite Function von x, y, z betrachtet wird. — Hieraus ſieht man, daß die gewöhnliche (analytiſche) Variation von V, nämlich:

$$\frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d.\frac{d\xi}{dx}}\,\frac{d\delta\xi}{dx} + \&c. \qquad (B)$$

mit der mechaniſchen Variation nicht identiſch iſt, wofern nicht:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z = 0$$

iſt. — Aber bei der gewöhnlichen Anwendung von x, y, z, welche die Coordinaten nicht irgend welcher wirklich exiſtirender Molekule, ſondern nur urſprünglicher Lagen von Molekulen ausdrücken, können die Symbole δx, δy, δz nicht vorkommen, und in dieſem Falle wird mithin δV durch (B) gegeben. —

Wir wollen nun die Lagrange'ſche Methode auf einige Aufgaben über Gleichgewicht und Bewegung anwenden, indem wir uns auf den Fall eines ſtetigen Syſtemes beſchränken, theils weil dieſe Methode auf dieſen Fall mit dem meiſten Vortheile angewandt werden kann, und theils, weil die Regeln der Variationsrechnung, und nicht irgend ein anderes Verfahren mit arbiträren Incrementen, auf dieſen Fall angewandt werden müſſen. — Da das Lagrange'ſche Verfahren ſeiner Natur nach höchſt gleichförmig iſt, ſo wird eine kleine Anzahl von Beiſpielen zur Erläuterung deſſelben hinreichend ſein. —

Aufgabe X.

146. Man ſoll die Gleichgewichtsbedingungen einer ausdehnbaren, oder nicht ausdehnbaren biegſamen Fläche finden, auf welche irgend ein Syſtem von Kräften wirkt. —

Aufl. Es ſei dS das Element dieſer Fläche, ſo hat man, wenn ſie nicht ausdehnbar iſt, nach dem Principe der virtuellen Geſchwindigkeiten die Gleichung:

$$\iint (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dS = 0,$$

und außerdem noch die Bedingungsgleichung:

$$\delta dS = 0.$$

Die nach den Regeln der Variationsrechnung zu behandelnde Gleichung iſt alſo nach dem Lagrange'ſchen Verfahren für relative Maxima und Minima:

$$\iint (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dS + \iint \lambda \delta dS = 0. \qquad (A)$$

Setzt man nun:

$$U = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

ſo hat man:

$$dS = U dx dy,$$

und folglich:

$$\delta . dS = U\delta . dx dy + \delta U dx dy.$$

Nach Aufg. VIII iſt aber offenbar:

$$\delta . dx dy = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}\right) dx dy,$$

und:

$$\delta U = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{1}{U}\left(p\,\frac{d\delta' z}{dx} + q\,\frac{d\delta' z}{dy}\right),$$

wo $\delta' z$ hier die gewöhnliche analytiſche Variation von z, d. h. die, welche z in Folge einer bloßen Formänderung bekommt, bedeutet. — Subſtituirt man für $\delta' z$ ſeinen Werth:

$$\delta z - p\delta x - q\delta y,$$

integrirt theilweiſe, und ſetzt zur Abkürzung:

$$V = \frac{d . \frac{\lambda p}{U}}{dx} + \frac{d . \frac{\lambda q}{U}}{dy}; \qquad (\mu)$$

ſo erhält man:

$$\int\{U\delta y+\frac{q}{U}(\delta z-p\delta x-q\delta y)\}\lambda dx+\int\{U\delta x+\frac{p}{U}(\delta z-p\delta x-p\delta y)\}\lambda dy$$

$$+\iint(UX+\lambda\frac{dU}{dx}-\frac{d\lambda U}{dx}+Vp)\delta x dx dy$$

$$+\iint(UY+\lambda\frac{dU}{dy}-\frac{d.\lambda U}{dy}+Vq)\delta y dx dy \qquad (B)$$

$$+\iint(UZ-V)\delta z dx dy=0.$$

Wenn man die Coefficienten von δx, δy, δz unter dem doppelten Integralzeichen einzeln $=0$ ſetzt, und reducirt; ſo erhält man die Gleichungen:

$$U\left\{X-\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)\right\}+Vp=0,$$

$$U\left\{Y-\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)\right\}+Vq=0, \qquad (C)$$

$$UZ-V=0,$$

wo:

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)=\frac{d\lambda}{dx}+p\frac{d\lambda}{dz},$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)=\frac{d\lambda}{dy}+q\frac{d\lambda}{dz}$$

iſt. — Multiplicirt man dieſelben reſp. mit dx, dy, dz und addirt die Produkte; ſo bekommt man die Gleichung:

$$\frac{d\lambda}{dx}dx+\frac{d\lambda}{dy}dy+\frac{d\lambda}{dz}dz=Xdx+Ydy+Zdz. \qquad (D)$$

Wenn die auf die Fläche wirkenden Kräfte ſo beſchaffen ſind, daß der Bedingung:

$$Xdx+Ydy+Zdz=d\Pi$$

genügt wird; ſo folgt aus der Gleichung (D):

$$d\lambda=d\Pi,\quad \lambda=\Pi+a.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die dritte der Gleichungen (C), ſo ergiebt ſich wegen (μ) als Gleichung der Fläche:

$$\frac{d.\frac{(\Pi+a)p}{U}}{dx}+\frac{d.\frac{(\Pi+a)q}{U}}{dy}-UZ=0. \qquad (E)$$

oder nach einer ähnlichen Transformation, wie die in Kap. 8, Aufg. I:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-\frac{1}{\Pi+a}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma). \qquad (F)$$

Nach Kap. 8 gibt diese Gleichung aber auch die Auflösung einer gewöhnlichen geometrischen Aufgabe über Maxima und Minima, nämlich:

„Wenn die Größe einer Fläche gegeben ist, ihre Form so zu bestimmen, daß das Integral:

$$\iint \Pi dx dy$$

ein Maximum oder Minimum wird." —

Demnach ist das mechanische Problem der Auffindung der Gleichgewichtsbedingungen identisch mit einer rein geometrischen Aufgabe über Maxima und Minima — und wir werden später sehen, daß dies nur ein specieller Fall eines allgemeinen Theoremes ist. —

Wir wollen nun die Bedingungen näher betrachten, welche an den Integrationsgrenzen erfüllt werden müssen. —

Die gegebene biegsame Fläche werde von zwei biegsamen Fäden begrenzt, wovon sich jeder längs einer gegebenen Fläche bewegen kann, die er in allen seinen Punkten berührt; aber in deren Substanz er nicht eindringen kann. — Da diese letzte Bedingung schon durch die Bedeutung des Zeichens δ erfüllt wird, welches die Idee des Ueberganges von einem materiellen Punkte zu einem andern ausschließt; so braucht nicht weiter davon die Rede zu sein. —

Die Gleichung einer der Grenzflächen sei:

$$dz = p'dx + q'dy,$$

so hat man nach der Bedeutung des Zeichens δ:

$$\delta z = p'\delta x + q'\delta y, \qquad (G)$$

und die in (B) unter dem einfachen Integralzeichen stehenden Glieder geben wieder wie früher (Nr. 112) für jede Integrationsgrenze:

$$\{U\delta y + \frac{q}{U}(\delta z - p\delta x - q\delta y)\} - \{U\delta x + \frac{p}{U}(\delta z - p\delta x - q\delta y\}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Subſtituirt man für δz ſeinen aus (G) genommenen Werth, eliminirt $\frac{dy}{dx}$ mittelſt der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p' - p}{q' - q},$$

und ſetzt die Coefficienten von δx, δy einzeln $= 0$; ſo erhält man die eine Gleichung:

$$1 + pp' + qq' = 0.$$

Die elaſtiſche Fläche ſchneidet alſo ihre eine Grenzfläche rechtwinklig, und daſſelbe iſt offenbar auch mit der andern Grenzfläche der Fall. —

147. Daß ſich die aus den Coefficienten von δx, δy gebildeten beiden Gleichungen auf eine reduciren, iſt offenbar durchaus nothwendig, um den Bedingungen der Aufgabe genügen zu können — und iſt nicht etwa dem vorliegenden Falle eigenthümlich, wie ſich leicht allgemein auf folgende Weiſe zeigen läßt:

Aus der Zuſammenſetzung der Glieder unter dem einfachen Integralzeichen iſt leicht erſichtlich, daß die Incremente δx, δy in dieſe Glieder auf zwei Wegen eingeführt werden, nämlich: 1) durch die mechaniſche Variation des Elementes $dxdy$, und 2) durch die Subſtitution von:

$$\delta z - p\delta x - q\delta y, \text{ oder } (p' - p)\delta x + (q' - q)\delta y$$

für die analytiſche, gewöhnliche Variation $\delta' z$. — Die auf die erſte Weiſe eingeführten Glieder ſind offenbar von der Form:

$$\int \ominus \delta x dy + \int \ominus \delta y dx, \qquad \text{(H)}$$

d. h. der Coefficient von δx und δy iſt in beiden Gliedern derſelbe — und wenn die auf die zweite Art eingeführten Glieder durch:

$$\int \Omega d' z dx + \int \Omega_1 \delta' z dy$$

dargeſtellt werden; ſo iſt der Beſtandtheil mit δx, δy offenbar:

$$\int \Omega \{(p' - p)\delta x + (q' - q)\delta y\} dx + \int \Omega_1 \{(p' - p)\delta x + (q' - q)\delta y\} dy. \qquad \text{(I)}$$

Addirt man die Ausdrücke (H) und (I), vertauſcht die independente Veränderliche wieder wie früher, und ſetzt die Coefficienten von δx, δy einzeln 0; ſo findet man:

$$-\Theta\frac{dy}{dx}+\Omega(p'-p)-\Omega_1(p'-p)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\Theta+\Omega(q'-q)-\Omega_1(q'-q)\frac{dy}{dx}=0.$$

Setzt man nun für $\frac{dy}{dx}$ ſeinen Werth $-\frac{p'-p}{q'-q}$, ſo werden dieſe beiden Gleichungen identiſch, und reduciren ſich auf die eine:

$$\Theta+\Omega(q'-q)+\Omega_1(p'-p)=0.$$

Wenn die biegſame Fläche ausdehnbar iſt, ſo fällt die Bedingung:

$$\delta dS=0$$

weg, und es wird eine neue Kraft eingeführt, deren Moment iſt:

$$F\delta dS.$$

Hieraus erhellet, daß die vorhergehende Unterſuchung dieſem letzten Falle angepaßt wird, wenn man nur λ in F umſetzt — und mithin bleiben die erhaltenen Reſultate dieſelben. —

Beiſpiel.

148. Wir wollen annehmen, daß die auf die biegſame Fläche wirkende Kraft in allen Punkten ſenkrecht darauf iſt; ſo iſt offenbar:

$$Xdx+Ydy+Zdz=0,$$

und mithin $\lambda=a$. Setzt man dieſen Werth in die dritte der Gleichungen (C), ſo findet man:

$$\frac{d.\frac{p}{U}}{dx}+\frac{d.\frac{q}{U}}{dy}=\frac{F}{a},$$

wo F die wirkende Kraft iſt. — Die Gleichung (F) wird in dieſem Falle:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-\frac{F}{a}.$$

Wenn also diese Kraft constant ist, so ist auch die mittlere Krümmung der Gleichgewichtsfläche constant, welche Eigenschaft, wie wir früher gesehen haben, der Fläche zukommt, welche bei einem gegebenen Flächeninhalte das größte Volumen einschließt (Nr. 76). Dieses ist offenbar der Fall, wenn eine biegsame Fläche dem Druck einer homogenen elastischen Flüssigkeit ausgesetzt ist. —

Wenn F die Schwerkraft ist, so wird in (F) offenbar:

$$\Pi = gz,$$

und mithin:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{g\cos\gamma}{gz+a},$$

oder wenn N der Theil der Normale zwischen der Fläche und der durch:

$$z = -\frac{a}{g}$$

ausgedrückten Ebene ist:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{1}{N},$$

wodurch eine ähnliche Eigenschaft, wie bei der Kettenlinie ausgedrückt wird. —

Aufgabe XI.

149. Wenn auf einen als stetig vorausgesetzten Körper ein System von Kräften wirkt, welches der Bedingung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Pi$$

genügt, und auch eine Kraft, welche das Element des Körpers auszudehnen, oder zusammenzudrücken strebt, zu beweisen: daß die Bestimmung der Bedingung des Gleichgewichtes auf eine Aufgabe über gewöhnliche Maxima und Minima reducirt werden kann. —

Aufl. Es sei dm das Körperelement, so ist das Moment der Kraft, welche dasselbe zu vergrößern, oder zu verkleinern strebt:

$$F\delta dm,$$

und folglich gibt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung:

$$\int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dm + \int F\delta dm = 0. \qquad (A)$$

Subſtituirt man für dm ſeinen Werth, welcher die Form:

$$Vdx,\ Vdxdy, \text{ oder } Vdxdydz$$

hat, jenachdem der betrachtete Körper eine materielle Linie, eine materielle Fläche, oder ein wirklicher Körper iſt, integrirt theilweiſe und ſetzt die Coefficienten von δx, δy, δz einzeln $= 0$; ſo findet man die drei Gleichungen des Gleichgewichtes. — Wir wollen hier den Fall eines feſten Körpers, als den einfachſten, ſpeciell betrachten. — Alsdann haben wir:

$$dm = Vdxdydz,$$

wo:

$$V = f(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \text{ &c.})$$

und u eine Größe iſt, welche von der Aggregation der Molekule, der Wärme, oder irgend welcher andern Urſache abhängt, die auf die in dieſem Falle mit V bezeichnete Dichtigkeit des Körpers Einfluß hat. — Wir haben mithin:

$$\delta dm = \{V\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) + \delta V\}dxdydz,$$

oder wegen:

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \delta' V$$

$$= \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + U\delta' u + V_x\frac{d\delta' u}{dx} + \text{ &c.}$$

auch:

$$\delta dm = \{V\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)dz$$

$$+ U\delta' u + V_x\frac{d\delta' u}{dx} + \text{ &c.}\}\, dxdydz,$$

wo U, V_x, etc. dieſelbe Bedeutung, wie in Kap. 7, Aufg. III haben und:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right),\ \left(\frac{dV}{dy}\right),\ \left(\frac{dV}{dz}\right)$$

wieder die vollſtändigen Differentialquotienten der als implicite, wie als explicite Function von x, y, z betrachteten Größe V bezeichnen. — Subſtituiren wir dieſen Werth in (A), integriren theilweiſe und ſetzen die Coefficienten von δx, δy, δz und $\delta' u$ einzeln $= 0$; ſo erhalten wir die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} VX + F\left(\frac{dV}{dx}\right) - \left(\frac{d.FV}{dx}\right) &= 0, \\ VY + F\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{d.FV}{dy}\right) &= 0, \\ VZ + F\left(\frac{dV}{dz}\right) - \left(\frac{d.FV}{dz}\right) &= 0, \\ FU - \left(\frac{d.FV_z}{dx}\right) - \text{&c.} &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

Werden die drei erſten derſelben reſp. mit dx, dy, dz multiplicirt und die Produkte addirt; ſo ergibt ſich:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = Xdx + Ydy + Zdz = d\Pi,$$

oder durch Integration:

$$F = \Pi + a.$$

Wenn dieſer Werth für F in (A) geſetzt wird, ſo erhält man endlich:

$$\int \{\delta\Pi dm + (\Pi + a)\,\delta dm\} = 0,$$

oder:

$$\delta\int \Pi dm + a\delta\int dm = 0.$$

Die Bedingung des Gleichgewichtes wird alſo gefunden, wenn man unter allen Formen der Function u, für welche die Maſſe des Körpers conſtant bleibt, diejenige ſucht, welche das Integral;

$$\int \Pi dm$$

zu einem Maximum, oder Minimum macht. — Da man hierbei die Variationen der Elemente nicht zu betrachten braucht, ſo wird auf dieſe Weiſe die allgemeine Unterſuchung über die Bedingungen des Gleichgewichtes offenbar ſehr vereinfacht. —

Aufgabe XII.

150. Die Gleichungen für die Bewegung eines elaſtiſchen Körpers zu finden, deſſen verſchiedene Molekule unendlich wenig aus ihrer Gleichgewichtslage verrückt ſind. —

Aufl. Bei der Anwendung des Lagrange'ſchen Verfahrens auf dieſen Fall müſſen wir zunächſt zwei weſentliche Vorausſetzungen machen — nämlich: 1) daß die Summe der innern Momente des Körpers durch die (mechaniſche) Variation einer einzigen Function V ausgedrückt werden kann — und 2) daß V eine Function der erſten Differentialquotienten der Verrückungen der Molekule iſt. — Die erſte Annahme findet offenbar bei einem Körper ſtatt, deſſen Molekule ſich nach irgend einem Geſetze ihrer gegenſeitigen Abſtände anziehen, oder abſtoßen. — Aber nach neueren Erfahrungen gibt es Körper, deren Conſtitution nicht ſo beſchaffen iſt, ſo daß dieſe erſte Bedingung nur als eine Hypotheſe betrachtet werden kann, deren Wahrſcheinlichkeitsgrad von der Anzahl der Fälle abhängt, wo die daraus abgeleiteten Reſultate durch die Erfahrung beſtätigt werden. —

Der Grund der zweiten Annahme liegt in der Natur der Molekularkräfte, welche nur von relativen und nicht von abſoluten Verrückungen der Molekule abzuhängen ſcheinen. —

Wir wollen die Gleichungen für die Bewegung eines elaſtiſchen Körpers ſuchen, auf welchen keine äußern Kräfte wirken, und wobei die Function V eine gegebene Form hat. — Da das anzuwendende Verfahren ſeiner Natur nach höchſt gleichförmig iſt, ſo wird es genügen, daſſelbe an einem einzelnen Falle zu zeigen, und wegen ausführlicherer Belehrung über dieſes wichtige Problem den Leſer auf Mac Cullagh's Abhandlung: On the Undulatory Theory of Light,[1]) Green's Abhandlung über denſelben Gegenſtand,[2]) und beſonders auf Haughton's zwei Abhandlungen: On the Equilibrium and Motion of Solid and Fluid Bodies[3]) und: On the Classification of Elastic Media[4]) zu verweiſen. —

Es ſeien nun x, y, z die Coordinaten irgend eines Molekules in ſeiner urſprünglichen Lage, und nach der Verrückung:

---

[1]) Transactions of the Royal Irish Academy, vol. XXI.

[2]) Transactions of the Camhr. Philos Society, vol. VII, p. 11.

[3]) Transactions of the Royal Irish Academy, vol. XXI.

[4]) Ibid. vol. XXII, part. 1.

$$x+\xi,\quad y+\eta,\quad z+\zeta.$$

Ferner nehmen wir an, daß der Körper ſo beſchaffen iſt, daß die Summe der Momente der durch dieſe Verrückung der Molekule hervorgerufenen Kräfte durch:

$$\iiint \delta V dx dy dz$$

ausgedrückt werden kann, wo:

$$V = \tfrac{1}{2} U\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 \qquad (A)$$

und U irgend eine Function von x, y, z iſt. — Um die allgemeine Gleichung der Bewegung:

$$\iiint\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}d\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}d\zeta\right)\varepsilon dx dy dz = \iiint \delta V dx dy dz \qquad (B)$$

dem vorliegenden Falle anzupaſſen, müſſen wir vor allen Dingen erſt die durch δV angedeutete mechaniſche Variation zu beſtimmen ſuchen.

Bei der Verrichtung der durch δ angedeuteten Operation muß bemerkt werden: daß ſich dieſes Zeichen auf virtuelle Verrückungen der Molekule aus ihren wirklichen Lagen, worin ſie ſich vermöge der Bedingungen der Aufgabe befinden, bezieht — ſo daß dabei die frühern Lagen gar nicht in Betracht kommen, und mithin das Symbol δ nicht auf x, y, z anzuwenden iſt, welche die Coordinaten nicht von wirklich exiſtirenden Molekulen ſind, ſondern blos von den Lagen, welche dieſe Molekule in ihrem urſprünglichen Zuſtande des Gleichgewichtes hatten. — Die mechaniſche Variation von V ſtimmt daher mit der eigentlichen analytiſchen oder geometriſchen Variation von V überein, und entſpringt blos aus einer Formänderung der Functionen ξ, η, ζ. — Wir haben folglich:

$$\delta V = \tfrac{1}{2}\delta . U\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)^2$$

$$= U\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)\left(\frac{d\delta\xi}{dx}+\frac{d\delta\eta}{dy}+\frac{d\delta\zeta}{dz}\right).$$

Subſtituiren wir dieſen Werth in den zweiten Theil der Gleichung (B), integriren theilweiſe und ſetzen die Coefficienten von $\delta\xi$

$\delta\eta$, $\delta\xi$ unter dem dreifachen Integralzeichen einzeln $= 0$; so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen für die Bewegung:

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d}{dx}\cdot U\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)\\
-\varepsilon\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d}{dy}\cdot U\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)\\
-\varepsilon\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d}{dz}\cdot U\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)
\end{aligned}
\qquad (C)
$$

oder wenn wir setzen:

$$\omega = \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz},$$

die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\frac{U}{\varepsilon}\frac{d\omega}{dx}-\frac{\omega}{\varepsilon}\frac{dU}{dx}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{U}{\varepsilon}\frac{d\omega}{dy}-\frac{\omega}{\varepsilon}\frac{dU}{dy}\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -\frac{U}{\varepsilon}\frac{d\omega}{dz}-\frac{\omega}{\varepsilon}\frac{dU}{dz}.
\end{aligned}
\qquad (D)
$$

Differentiiren wir diese Gleichungen resp. nach x, y, z und addiren die Resultate, so erhalten wir leicht die folgende Gleichung mit nur einer abhängigen Veränderlichen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\omega}{dt^2} &= -\frac{U}{\varepsilon}\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}+\frac{d^2\omega}{dy^2}+\frac{d^2\omega}{dz^2}\right)\\
&-\left(\frac{2}{\varepsilon}\frac{dU}{dx}-\frac{U}{\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dx}\right)\frac{d\omega}{dx}-\left(\frac{2}{\varepsilon}\frac{dU}{dy}-\frac{U}{\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dy}\right)\frac{d\omega}{dy}-\left(\frac{2}{\varepsilon}\frac{dU}{dz}-\frac{U}{\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dz}\right)\frac{d\omega}{dz}\\
&-\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\frac{dU}{dx}+\frac{d}{dy}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\frac{dU}{dy}+\frac{d}{dz}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\frac{dU}{dz}\right)\omega.
\end{aligned}
\qquad (E)
$$

Die Glieder außerhalb des dreifachen Integralzeichens geben die Gleichung:

$$\iint U'\left(\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\eta'}{dy}+\frac{d\zeta'}{dz}\right)(\delta\xi' dydz+\delta\eta' dxdz+\delta\zeta' dxdy)=0.$$

Wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Normale der Begrenzungs-

fläche mit den Coordinatenaxen macht, und dS ist das Element dieser Fläche; so kann die letzte Gleichung nach S. 240 offenbar auf folgende Form gebracht werden:

$$\iint U'\left(\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\eta'}{dy}+\frac{d\zeta'}{dz}\right)(\cos\alpha\delta\xi'+\cos\beta\delta\eta'+\cos\gamma\delta\zeta')\,dS=0, \quad (F)$$

bei deren Anwendung folgende Fälle vorkommen können:

(1). Die äußern Molekule des Körpers liegen absolut fest. — In diesem Falle ist an der Grenzfläche:

$$\delta\xi'=0, \quad \delta\eta'=0, \quad \delta\zeta'=0,$$

und die Gleichung (F) wird eine identische. —

(2). Die äußern Molekule können sich auf einer gegebenen Fläche, aber nicht in normaler Richtung gegen diese Fläche bewegen. — Wenn die Gleichung der Grenzfläche folgende ist:

$$f(x, y, z)=0,$$

so hat man, da sie nach der Voraussetzung für die Coordinaten jedes äußeren Molekules stattfinden muß, wie dieses auch verrückt werden mag:

$$\frac{df}{dx}\xi+\frac{df}{dy}\eta+\frac{df}{dz}\zeta=0,$$

und mithin:

$$\frac{df}{dx}\delta\xi+\frac{df}{dy}\delta\eta+\frac{df}{dz}\delta\zeta=0,$$

oder:

$$\cos\alpha\delta\xi+\cos\beta\delta\eta+\cos\gamma\delta\xi=0.$$

Die Gleichung (F) ist folglich wieder eine identische. —

(3). Die äußern Molekule des Körpers sind ganz frei. — In diesem Falle kann der Grenzgleichung nur genügt werden, wenn man setzt:

$$U'\left(\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\eta'}{dy}+\frac{d\zeta'}{dz}\right)=0,$$

und folglich:

$$V'=0.$$

151. Der wichtigste Fall ist jedoch der, wo sich zwei Medien

berühren, die in der Form von V verschieden sind. — Wir wollen z. B. annehmen, daß sie sich in einer unbegrenzten Ebene berühren, welche wir zur Ebene der xy nehmen wollen, und die beiden Medien entsprechenden Werthe von V seien:

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\left(A_1 \frac{d\xi^2}{dx^2} + B_1 \frac{d\eta^2}{dy^2} + C_1 \frac{d\zeta^2}{dz^2}\right),$$
$$V_2 = \tfrac{1}{2}\left(A_2 \frac{d\xi^2}{dx^2} + B_2 \frac{d\eta^2}{dy^2} + C_2 \frac{d\zeta^2}{dz^2}\right), \qquad \text{(G)}$$

wo A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 Constanten sind. — Wenn nun in dem ersten Mittel eine ebene Wellenbewegung entsteht, welche durch die Gleichungen:

$$\xi_1 = L_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_1}(v_1 t - z),$$
$$\eta_1 = M_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_1}(v_1 t - z), \qquad \text{(H)}$$
$$\zeta_1 = N_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_1}(v_1 t - z)$$

ausgedrückt wird, die ebene Wellenbewegung zu bestimmen, welche in das zweite Mittel fortgepflanzt wird. —

Da die Wirkung der Molekularkräfte auf endliche Entfernungen unmerklich ist, so muß man, um die Bewegung eines in dem ersten Mittel in endlicher Entfernung von der Trennungsfläche beider Mittel liegenden Molekules zu erhalten, in der allgemeinen Gleichung offenbar setzen:

$$V = V_1,$$

für ein in dem zweiten Mittel ähnlich liegendes Molekul:

$$V = V_2,$$

und für Molekule, welche in, oder unendlich nahe an der Trennungsfläche liegen:

$$V = V_1 + V_2.$$

Bei der Bestimmung der an den Integrationsgrenzen zu beobachtenden Bedingungen muß man offenbar von diesem letzten Werthe

$$A_1, B_1, C_1, \quad A_2, B_2, C_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2$$

Conſtanten ſind, ſetzt:

$$-a_1^2\varepsilon_1 = A_1, \quad -b_1^2\varepsilon_1 = B_1, \quad -c_1^2\varepsilon_1 = C_1,$$
$$-a_2^2\varepsilon_2 = A_2, \quad -b_2^2\varepsilon_2 = B_2, \quad -c_2^2\varepsilon_2 = C_2,$$

ſo werden die Gleichungen (K) und (L):

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = a_1^2\frac{d^2\xi_1}{dx^2}, \qquad \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = a_2^2\frac{d^2\xi_2}{dx^2},$$
$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = b_1^2\frac{d^2\eta_1}{dy^2}, \quad \text{(P)}, \qquad \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = b_2^2\frac{d^2\eta_2}{dy^2}, \quad \text{(Q)}$$
$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = c_1^2\frac{d^2\zeta_1}{dz^2}, \qquad \frac{d\zeta^2{}_2}{dt^2} = c_2^2\frac{d^2\zeta_2}{dz^2}.$$

Da nun die Bewegung in dem erſten Mittel nach der Vorausſetzung durch die Gleichungen (H) ausgedrückt wird, ſo erhält man, wenn die aus dieſen Gleichungen abgeleiteten Werthe von ξ_1, η_1, ζ_1 in (P) ſubſtituirt werden:

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad \nu_1 = c_1.$$

Zur Beſtimmung der Bewegung in dem zweiten Mittel hat man zuerſt die Integralgleichungen von (Q), nämlich:

$$\xi_2 = f(x + a_2t, y, z) + F(x - a_2t, y, z),$$
$$\eta_2 = \varphi(y + b_2t, x, z) + \Phi(y - b_2t, x, z),$$
$$\zeta_2 = \psi(z + c_2t, x, y) + \Psi(z - c_2t, x, y).$$

Sollen dieſe Gleichungen eine ebene Wellenbewegung ausdrücken, ſo müſſen ſie ſich auf die Form:

$$\xi_2 = f(my + nz + x + a_2t) + F(m'y + n'z + x - a_2t),$$
$$\eta_2 = \varphi(lx + \&c.) + \Phi(l'x + \&c.),$$
$$\zeta_2 = \psi(px + \&c.) + \Psi(p'x + \&c.)$$

reduciren. — Als Grenzbedingungen hat man wegen der Aequivalenz der Vibrationen:

$$\xi'_1 = \xi'_2, \quad \eta'_1 = \eta'_2, \quad \zeta'_1 = \zeta'_2$$

und:

wo die Größen ξ', ... accentuirt sind, um anzudeuten, daß sie sich auf die Grenzen beziehen — und die negativen Zeichen sind gesetzt, weil die Integrationen in entgegengesetzter Richtung geschehen. — Sind alsdann α, β, γ die Winkel, welche die Normale der Grenzfläche mit den Coordinatenaxen macht, und wird die vorhergehende Gleichung wie in Nr. 95 transformirt; so ist an der Integrationsgrenze:

$$\left(A_1 \frac{d\xi'_1}{dx} d\xi'_1 - A_2 \frac{d\xi'_2}{dx} \delta\xi'_2\right)\cos\alpha + \left(B_1 \frac{d\eta'_1}{dy} d\eta'_1 - B_2 \frac{d\eta'_2}{dy} \delta\eta'_2\right)\cos\beta$$

$$+ \left(C_1 \frac{d\xi'_1}{dz} \delta\xi' - C_2 \frac{d\xi'_2}{dz} \delta\xi'_2\right)\cos\gamma = 0.$$

In dem jetzigen Falle, wo die Ebene der xy die Grenzfläche ist, hat man:

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0,$$

und die vorhergehende Gleichung wird:

$$C_1 \frac{d\xi'_1}{dz} \delta\xi'_1 - C_2 \frac{d\xi'_2}{dz} \delta\xi'_2 = 0.$$

Aber da die Verrückung desselben Molekules dieselbe sein muß, auf welches Mittel sie auch bezogen wird; so muß man haben:

$$\delta\xi'_1 = \delta\xi'_2,$$

und also endlich:

$$C_1 \frac{d\xi'_1}{dz} = C_2 \frac{d\xi'_2}{dz}. \qquad (N)$$

Außerdem hat man noch die drei Gleichungen:

$$\xi'_1 = \xi'_2, \quad \eta'_1 = \eta'_2, \quad \zeta'_1 = \zeta'_2, \qquad (O)$$

welche ausdrücken, daß die schwingenden Moleküle an der Trennungsfläche beider Mittel sowohl zu dem einen, als zu dem andern gehörig betrachtet werden können. — Es müssen also die vier durch die Gleichungen (N) und (O) ausgedrückten Bedingungen erfüllt werden, wenn die Wellenbewegung aus dem einen Mittel in das andere übergehen soll. — Wenn die Beschaffenheit der Undulation in dem ersten Mittel gegeben ist, so dienen diese Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (L) zur Bestimmung der in das zweite Mittel übergegangenen Undulation. — Wenn man in dem gegenwärtigen Falle, wo die Größen:

und mithin:

$$\Psi(-c_2 t) = \tfrac{1}{2} N_1 \left(1 + \frac{C_1 c_2}{C_2 v_1}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} v_1 t,$$

$$\psi(+c_2 t) = \tfrac{1}{2} N_1 \left(1 - \frac{C_1 c_2}{C_2 v_1}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} v_1 t.$$

Folglich ist:

$$\Psi(z - c_2 t) = \tfrac{1}{2} N_1 \left(1 + \frac{C_1 c_2}{C_2 v_1}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{v_1}{c_2} (z - c_2 t),$$

$$\psi(z + c_2 t) = \tfrac{1}{2} N_1 \left(1 - \frac{C_1 c_2}{C_2 v_1}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{v_1}{c_2} (z + c_2 t),$$

und die in das zweite Medium fortgepflanzte Wellenbewegung wird also endlich ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2 = 0, \tag{V}$$

$$\zeta_2 = \tfrac{1}{2} N_1 \left\{ \left(1 + \frac{C_1 c_2}{C_2 v_1}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{v_1}{c_2} (z - c_2 t) \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{C_1 c_2}{C_2 v_1}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{v_1}{c_2} (z + c_2 t) \right\}.$$

Zehntes Kapitel.

Anwendung der Variationsrechnung auf die Bestimmung der Integrabilitätsbedingungen der Differentialausdrücke von einer und von mehreren independenten Veränderlichen.

152. Ein Differentialausdruck irgend welcher Art heißt integrabel, wenn sich sein Integral als eine Function von Größen ausdrücken läßt, die sich nur auf beliebig angenommene Integrationsgrenzen beziehen. So ist z. B. der Ausdruck:

$$Vdx$$

integrabel, wenn man der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x_1} Vdx = F\left\{x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdots \cdots x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdots \right\}$$

genügen kann, ohne die Form der Function y zu bestimmen, oder ohne den Grenzen x_0, x_1 irgend welche specielle Werthe beizulegen. Nach der Natur des Processes der Integration ist einleuchtend, daß die Function F von der Form sein muß:

$$f\left\{x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_1\right\} - f\left\{x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0\right\}.$$

Wenn aber diese Gleichung zulässig ist, so ist die Variation des betrachteten Integrales offenbar von der Form:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx = A_1\delta y_1 + B_1\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \&c. + A_0\delta y_0 + B_0\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \&c.$$

Vergleicht man dies mit dem allgemeinen Ausdrucke in Nr. 11, nämlich:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx = N_1\delta y_1 + (P_1)_1\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \&c. + N_0\delta y_0 + \&c.$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \&c.\right)\delta y dx,$$

so ist unmittelbar klar, daß beide Ausdrücke nur identisch sein können, wenn das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(N-\frac{dP_1}{dx}+\&c.\right)\delta y dx$$

unabhängig von der Form der Function y verschwindet. — Wenn also der Differentialausdruck Vdx integrabel sein soll, so muß V eine solche Form haben, daß die Gleichung:

$$N-\frac{dP_1}{dx}+\&c.=0$$

eine identische wird. —

Umgekehrt: wenn diese Gleichung identisch wahr ist, so ist das Differential:

$$Vdx$$

integrabel. — Denn in diesem Falle ist die Variation des Integrales:

$$\int_{x_1}^{x_0} Vdx$$

blos von den Variationen der sich auf die Grenzen beziehenden Größen:

$$x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \ldots . x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \ldots .$$

abhängig. — Das Integral ist also blos eine Function dieser Größen — und mithin das Differential:

$$Vdx$$

integrabel.*) —

Das Vorhergehende läßt sich leicht auf beliebig vielfache Integrale ausdehnen. Denn wir haben früher gesehen, daß die Variation eines bestimmten Integrales aus zwei verschiedenen Arten von Gliedern besteht; nämlich: 1) aus einer Reihe von Gliedern, welche von den Variationen der Grenzwerthe der unbestimmten Functionen, d. h. der in V enthaltenen primitiven Function und ihrer Differential-

*) Wenn also Vdx unabhängig von der Form von y, d. h. bei jeder Form von y integrabel ist; so reducirt sich die Gleichung $\beta=0$ auf $0=0$. — In diesem Falle ist folglich das allgemeine Verfahren in Nr. 26 nicht mehr anwendbar. — S.

quotienten abhängen — und 2) aus einer Reihe von Gliedern, welche von der Variation in der allgemeinen Form der primitiven Function ſelbſt, ꝛc. abhängen.

Wenn nun die Form von V ſo beſchaffen iſt, daß dieſe letzten Glieder verſchwinden, ſo iſt klar, daß der Werth des beſtimmten Integrales blos von den Grenzwerthen der verſchiedenen unbeſtimmten Größen abhängt. — Der gegebene Differentialausdruck iſt alſo einmal integrabel, d. h. ein vielfaches Integral deſſelben läßt ſich auf ein um eine Einheit minder vielfaches Integral zurückführen. — Wir haben daher die folgende allgemeine Regel:

„Wenn V eine Function von n independenten Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, einer abhängigen Veränderlichen u und deren verſchiedenen Differentialquotienten nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ iſt, und man ſoll beſtimmen, in welchen Fällen das $n$fache Integral:

$$\int\int \ldots \int V dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

auf ein $(n-1)$faches reducirt werden kann; ſo ſuche man nach den Regeln der Variationsrechnung die **vollſtändige** oder **totale** Variation jenes Integrales und reducire dieſelbe durch theilweiſe Integration ſo lange, bis unter dem vielfachſten Integralzeichen blos **eine** Variation δu vorkommt. — Iſt alsdann die Form der Function V ſo beſchaffen, daß der Coefficient von δu **verſchwindet**; ſo läßt ſich das gegebene Integral auf ein $(n-1)$faches zurückführen, d. h. das gegebene Differential **einmal** integriren." —

Die Variationsrechnung gibt alſo das Mittel an die Hand: unmittelbar das Kriterium der Integrabilität eines Differentialausdruckes zu finden. —

Vermittelſt derſelben Regel kann man offenbar auch beſtimmen, in welchen Fällen ein Integral wie:

$$\int\int V dx dy$$

auf ein anderes:

$$\int\int V' dx dy$$

reducirt werden kann; denn wenn dies thunlich iſt, ſo muß das Differential:

$$(V - V')\,dxdy$$

integrabel sein. —

Wir wollen nun verschiedene Fälle einfacher und doppelter Integrale betrachten. — Bei einem einfachen Integrale, d. h. mit einer independenten Veränderlichen, läßt sich mittelst der obigen allgemeinen Regel sofort bestimmen, unter welchen Bedingungen ein gegebenes höheres Differential mit einer Independenten irgend eine Anzahl von Malen nacheinander integrabel ist — und mit dieser Untersuchung wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Aufgabe I.

153. Wenn:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)$$

ist, die Bedingungen zu finden, welche erfüllt werden müssen, wenn V successive m mal ($m < n$) integrabel sein soll? —

Aufl. Aus der vorhergehenden Nr. ist klar, daß, wenn V nacheinander m mal integrabel ist, die Variation von:

$$\int^m V dx^m,$$

so viel als möglich durch theilweise Integration reducirt, aus lauter von dem Integralzeichen freien Gliedern besteht. — Nun ist aber:

$$\delta\int^m V dx^m = \int^m \delta V dx^m = \int^m \left(N\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + \text{&c.} + P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n}\right) dx^m, \quad \text{(A)}$$

und wenn man hiervon irgend ein Glied, z. B. das Glied:

$$\int^m P_k \frac{d^k \delta y}{dx^k}\, dx^m$$

betrachtet; so hat man bei Hinweglassung der von dem Integralzeichen freien Glieder:

$$\int^m P_k \frac{d^k \delta y}{dx^k}\, dx^m = (-1)^k \left(\int^m \frac{d^k P_k}{dx^k} \delta y dx^m - k \int^{m-1} \frac{d^{k-1} P_k}{dx^{k-1}} \delta y dx^{m-1} + \frac{k.k-1}{1.2} \int^{m-2} \frac{d^{k-2} P_k}{dx^{k-2}} \delta y dx^{m-2} - \text{&c.}\right);$$

folglich:

$$\delta . \int^m V dx^m = \Sigma \int^m P_k \frac{d^k \delta y}{dx^k} dx^m$$

$$= \Sigma \Big\{ (-1)^k \Big(\int^m \frac{d^k P_k}{dx^k} \delta y dx^m - k \int^{m-1} \frac{d^{k-1} P_k}{dx^{k-1}} \delta y dx^{m-1}$$

$$+ \frac{k.k-1}{1.2} \int^{m-2} \frac{d^{k-2} P_k}{dx^{k-2}} \delta y dx^{m-2} - \&c. \Big) \Big\}.$$

Soll aber dieſer Ausdruck von allen Integralzeichen frei ſein, ſo müſſen die Coefficienten von δy unter den Zeichen:

$$\int^m, \int^{m-1} \&c.$$

von ſelbſt verſchwinden. — Man hat alſo die Gleichungen:

$$\Sigma (-1)^k \frac{d^k P_k}{dx^k} = 0, \quad \Sigma (-1)^{k-1} k \frac{d^{k-1} P_k}{dx^{k-1}} = 0,$$

$$\Sigma (-1)^{k-2} \frac{k.k-1}{1.2} \frac{d^{k-2} P_k}{dx^{k-2}} = 0, \ \&c.,$$

oder wegen $P_0 = N$ auch:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \&c. + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0,$$

$$P_1 - 2 \frac{dP_2}{dx} + 3 \frac{d^2 P_3}{dx^2} - \&c. + (-1)^{n-1} n \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}} = 0,$$

$$P_2 - 3 \frac{dP_3}{dx} + \&c. + (-1)^{n-2} \frac{n.n-1}{1.2} \frac{d^{n-2} P_n}{dx^{n-2}} = 0, \qquad (B)$$

$$\&c. \quad \&c. \quad \&c.$$

$$P_{m-1} - m \frac{dP_m}{dx} + \frac{m.m+1}{1.2} \frac{d^2 P_{m+1}}{dx^2} - \&c.$$

$$+ (-1)^{n-m+1} \frac{m.m+1 \ldots . n}{1.2 \ldots n - m + 1} \frac{d^{n-m+1} P_n}{dx^{n-m+1}} = 0.$$

Wenn dieſe m Gleichungen unabhängig von der Form der Function y erfüllt werden, ſo läßt ſich die gegebene Differentialfunction m mal nach einander integriren. —

Daſſelbe Verfahren iſt auch in dem Falle anwendbar, wo V eine beliebige Anzahl abhängiger Veränderlicher y, z, u, ... enthält, indem durch jede der letztern m ähnliche Gleichungen wie (B) eingeführt werden. — Wenn alſo V überhaupt m' abhängige Veränderliche enthält, ſo iſt die Geſammtzahl der Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müſſen, wenn V nacheinander m mal integrabel ſein ſoll, $= mm'$. — Wenn:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^n y}{dx^n}, z, \frac{dz}{dx} \ldots \frac{d^{n'} z}{dx^{n'}}, \text{&c.}\right)$$

iſt, ſo kann m offenbar nicht größer ſein, als die kleinſte der Zahlen n, n', ... Wenn $m = 1$ iſt, alſo die Bedingung geſucht wird, welche erfüllt werden muß, wenn Vdx ein genaues Differential ſein ſoll; ſo bleibt von den Gleichungen (B) nur die erſte:

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \text{&c.} + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0,$$

was mit dem in der vorhergehenden Nr. gefundenen Reſultate übereinſtimmt. —

Aufgabe II.

154. Man ſoll die Form der Function:

$$V = f(x, y, z, p, q)$$

ſo beſtimmen, daß ſich das Doppelintegral:

$$\iint V dx dy$$

auf ein einfaches Integral reduciren läßt. —

Aufl. Das hier anzuwendende Verfahren iſt dem bei einem einfachen Integrale angewandten ganz analog — und beſteht darin: daß man den Ausdruck der Function Ω ſucht, welche in der Variation von $\iint V dx dy$ unter dem doppelten Integralzeichen bleibt, und dann die Form von V ſo beſtimmt, daß jene Function von ſelbſt verſchwindet. —

Wie früher (Nr. 114) läßt ſich leicht zeigen: daß die Differentialquotienten der erſten und zweiten Ordnung in Ω nicht erſcheinen, wenn V eine lineare Function von p, q iſt; aber auch nur in dieſem Falle. — Es muß alſo ſein:

$$V = ap + \beta q + \gamma,$$

wo α, β, γ Functionen von x, y, z sind. — Ferner kann man offenbar bei der Bildung der Ausdrücke von:

$$\frac{dV_x}{dx}, \quad \frac{dV_y}{dy}, \quad N$$

alle Glieder mit Differentialquotienten hinweglassen, weil alle solche Glieder aus dem Endresultate doch verschwinden würden. — Hiernach hat man:

$$\left(\frac{dV_x}{dx}\right) = \frac{d\alpha}{dx}, \quad \left(\frac{dV_y}{dy}\right) = \frac{d\beta}{dy}, \quad N = \frac{d\gamma}{dz}$$

und folglich:

$$\Omega = \frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}.$$

Hieraus schließen wir endlich: daß sich das Doppelintegral:

$$\iint f(x, x, z, p, q)\, dx dy$$

auf ein einfaches reduciren läßt, wenn:

$$f(x, y, z, p, q) = pF_1(x, y, z) + qF_2(x, y, z) - F_3(x, y, z)$$

ist, indem die Functionen F_1, F_2, F_3 durch die Gleichung:

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} = 0 \qquad \text{(A)}$$

verbunden sind. —

Beispiel.

155. Es sei:

$$V = \mu(px + qy - z),$$

wo μ eine Function von x, y, z ist; so hat man:

$$F_1 = \mu x, \quad F_2 = \mu y, \quad F_3 = \mu z;$$

folglich:

$$\frac{dF_1}{dx} = \mu + x\frac{d\mu}{dx}, \quad \frac{dF_2}{dy} = \mu + y\frac{d\mu}{dy}, \quad \frac{dF_3}{dz} = \mu + z\frac{d\mu}{dz},$$

und die Gleichung (A) wird demnach:

$$x\frac{d\mu}{dx}+y\frac{d\mu}{dy}+z\frac{d\mu}{dz}+3\mu=0.$$

Das Doppelintegral.

$$\iint\mu(px+qy-z)\,dxdy$$

läßt ſich alſo auf ein einfaches reduciren, wenn μ eine homogene Function von der (-3)ten Ordnung iſt. —

Hieraus fließt folgendes Theorem:

„Wenn durch dieſelbe geſchloſſene Curve mehrere Flächen gelegt werden, dS das Flächenelement irgend einer derſelben, P das Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Berührungsebene iſt, und es ſind x, y, z die laufenden Coordinaten; ſo iſt der Werth des auf die ganze, von der geſchloſſenen Curve begrenzte Fläche erſtreckten Integrales:

$$\iint\frac{P}{x^3}\varphi\left(\frac{z}{x},\frac{y}{x}\right)dS$$

für alle dieſe Flächen **derſelbe.**“ — Denn wegen:

$$PdS=-(px+qy-z)\,dxdy$$

erhellet aus der vorhergehenden Unterſuchung: daß der Werth dieſes Integrales nur von den Grenzwerthen von x, y, z, d. h. von der Grenzcurve abhängt, welche nach der Vorausſetzung für alle dieſe Flächen dieſelbe iſt.*) —

---

*) Dieſes Theorem läßt ſich auf folgende andere Art beweiſen: Wenn r, θ, φ die Polarcoordinaten eines Punktes der Fläche ſind, ſo iſt:

$$\cos\theta=\frac{z}{r},\quad\tan\varphi=\frac{y}{x}$$

und folglich:

$$\sin\theta d\theta=\frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{r}(x+pz)-rp\right)dx+\frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{r}(y+qz)-rq\right)dy,$$

$$d\varphi=\frac{x}{y^2+x^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx$$

woraus ſich auf die gewöhnliche Weiſe ergibt:

Aufgabe III.

156. Man ſoll die Bedingungen angeben, welche erforderlich ſind, damit ſich das Doppelintegral:

$$\iint V dx dy$$

auf ein einfaches reduciren läßt, wenn:

$$V = f(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

iſt, und p, q, r, s, t die Differentialquotienten der zweiten Ordnung ſind. —

Aufl. Man bildet den Werth von Ω wie in der vorhergehenden Aufgabe, und beſtimmt dann die Form von V ſo, daß Ω von ſelbſt verſchwindet. — Nun haben wir aber früher (Nr. 114) geſehen, daß die Differentialquotienten der dritten und vierten Ordnung in Ω fehlen, wenn V von der Form iſt:

$$A(rt - s^2) + Br + 2Cs + Dt + E, \qquad \text{(A)}$$

wo A, B, C, D, E im Allgemeinen Functionen von p, q, x, y, z ſind — und nur in dieſem Falle. — Alsdann iſt:

$$\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{px + qy - z}{r^3} dx dy,$$

und woraus leicht erſichtlich iſt, daß ſich das gegebene Integral auf die Form:

$$\iint \frac{r^3}{x^3} \psi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right) \sin\theta d\theta d\varphi$$

bringen läßt, oder für z und y ihre Werthe geſetzt:

$$\iint \chi(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Da in dieſem Doppelintegrale nur independente Veränderliche vorkommen, ſo läßt ſich daſſelbe offenbar auf ein einfaches reduciren; aber alle ſolche Methoden ſind weniger allgemein, als die im Texte befolgte, welche eine Regel für die Beſtimmung der Integrabilitätsbedingung jeder beliebigen Function von x, y, z, p, q gibt. —

$$N=(rt-s^2)\frac{dA}{dz}+r\frac{dB}{dz}+2s\frac{dC}{dz}+t\frac{dD}{dz}+\frac{dE}{dz},$$

$$V_x=(rt-s^2)\frac{dA}{dp}+r\frac{dB}{dp}+2s\frac{dC}{dp}+t\frac{dD}{dp}+\frac{dE}{dp}, \qquad (B)$$

$$V_y=(rt-s^2)\frac{dA}{dq}+r\frac{dB}{dq}+2s\frac{dC}{dq}+t\frac{dD}{dq}+\frac{dE}{dq},$$

$$V_{x^2}=At+B, \quad V_{xy}=-2As+2C, \quad V_{y^2}=Ar+D,$$

und bei der Bildung der Werthe von:

$$\frac{dV_x}{dx}, \frac{dV_y}{dy}, \frac{d^2V_{x^2}}{dx^2}, \frac{d^2V_{xy}}{dxdy}, \frac{d^2V_{y^2}}{dy^2}$$

kann man offenbar alle Glieder und Differentialquotienten von einer höhern als der zweiten Ordnung unbeachtet lassen, weil, wie wir früher gesehen haben, diese Glieder doch aus dem Endresultate verschwinden würden. — Demnach hat man:

$$\frac{dV_{x^2}}{dx}=t\left(\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}+r\frac{dA}{dp}+s\frac{dA}{dq}\right)+\frac{dB}{dx}+p\frac{dB}{dz}+r\frac{dB}{dp}+s\frac{dB}{dq},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV_{xx}}{dy}=-s\left(\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}+s\frac{dA}{dp}+t\frac{dA}{dq}\right)+\frac{dC}{dy}+q\frac{dC}{dz}+s\frac{dC}{dp}+t\frac{dC}{dq};$$

folglich:

$$\frac{dV_{x^2}}{dx}+\tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy}-V_y=\frac{dB}{dx}+p\frac{dB}{dz}+\frac{dC}{dy}+q\frac{dC}{dz}-\frac{dE}{dp}$$

$$+t\left(\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}+\frac{dC}{dq}-\frac{dD}{dp}\right)-s\left(\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}-\frac{dB}{dq}+\frac{dC}{dp}\right),$$

und ebenso:

$$\frac{dV_{y^2}}{dy}+\tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx}-V_y=\frac{dD}{dy}+q\frac{dD}{dz}+\frac{dC}{dx}+p\frac{dC}{dz}-\frac{dE}{dq}$$

$$+r\left(\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}+\frac{dC}{dp}-\frac{dB}{dq}\right)-\left(\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}-\frac{dD}{dp}+\frac{dC}{dq}\right).$$

Es ist mithin:

$$\Omega=\frac{d}{dx}\left(\frac{dV_{x^2}}{dx}+\tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dy}-V_x\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{dV_{y^2}}{dy}+\tfrac{1}{2}\frac{dV_{xy}}{dx}-V_y\right)+N$$

$$=\ominus(rt-s^2)+Lr+2Ms+Nt+II, \qquad (C)$$

wo geſetzt iſt:

$$\Theta = 3\frac{dA}{dz} + \frac{d^2A}{dxdp} + \frac{d^2A}{dydq} + p\frac{d^2A}{dzdp} + q\frac{d^2A}{dzdq}$$
$$+ 2\frac{d^2C}{dpdq} - \frac{d^2B}{dq^2} - \frac{d^2D}{dp^2}.$$

$$L = \frac{d^2A}{dy^2} + 2q\frac{d^2A}{dydz} + q^2\frac{d^2A}{dz^2}$$
$$+ 2\frac{dB}{dz} + \frac{d^2B}{dxdp} - \frac{d^2B}{dydq} + p\frac{d^2B}{dzdp} - q\frac{d^2B}{dzdq} \qquad (D)$$
$$+ 2\left(\frac{d^2C}{dydp} + q\frac{d^2C}{dzdp}\right) - \frac{d^2E}{dp^2}.$$

$$M = -\left(\frac{d^2A}{dxdy} + p\frac{d^2A}{dydz} + q\frac{d^2A}{dxdz} + pq\frac{d^2A}{dz^2}\right)$$
$$+ 2\frac{dC}{dz} + \frac{d^2B}{dydq} + p\frac{d^2B}{dxdq} + \frac{d^2D}{dydp} + q\frac{d^2D}{dzdp} - \frac{d^2E}{dpdq}.$$

$$N = \frac{d^2A}{dx^2} + 2p\frac{d^2A}{dxdz} + p^2\frac{d^2A}{dz^2}$$
$$+ 2\frac{dD}{dz} + \frac{d^2D}{dydq} - \frac{d^2D}{dxdp} + q\frac{d^2D}{dzdq} - p\frac{d^2D}{dzdp}$$
$$+ 2\left(\frac{d^2C}{dxdq} + p\frac{d^2C}{dzdq}\right) - \frac{d^2E}{dq^2}.$$

$$\Pi = \frac{d^2B}{dx^2} + 2p\frac{d^2B}{dxdz} + p^2\frac{d^2B}{dz^2}$$
$$+ \frac{d^2D}{dy^2} + 2q\frac{d^2D}{dydz} + q^2\frac{d^2D}{dz^2}$$
$$+ 2\left(\frac{d^2C}{dxdy} + q\frac{d^2C}{dxdz} + p\frac{d^2C}{dydz} + pq\frac{d^2C}{dz^2}\right)$$
$$- \left(\frac{d^2E}{dxdp} + \frac{d^2E}{dyd\gamma} + p\frac{d^2E}{dzdp} + q\frac{d^2E}{dzdq}\right) + \frac{dE}{dz}.$$

Wenn alſo die gegebene Function V integrabel ſein ſoll, ſo muß ſie den Gleichungen:

$$\Theta = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \Pi = 0 \qquad \text{(E)}$$

genügen, welche mithin das Kriterium der Integrabilität der gegebenen Differentialfunction:

$$V dx dy$$

bilden. —

Wir wollen nun noch zwei ſpecielle Fälle betrachten, welche uns auf intereſſante Reſultate in Bezug auf die Theorie der krummen Flächen führen werden. —

Beiſpiel 1.

Es ſei:

$$V = A(rt - s^2),$$

ſo iſt:

$$B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

und folglich:

$$\Pi = 0.$$

Die Gleichungen (E) werden mithin auf:

$$\begin{gathered} 3\frac{dA}{dz} + \frac{d^2A}{dxdp} + \frac{d^2A}{dydq} + p\frac{d^2A}{dzdp} + q\frac{d^2A}{dzdq} = 0, \\ \frac{d^2A}{dy^2} + 2q\frac{d^2A}{dydz} + q^2\frac{d^2A}{dz^2} = 0, \\ \frac{d^2A}{dxdy} + p\frac{d^2A}{dydz} + q\frac{d^2A}{dxdz} + pq\frac{d^2A}{dz^2} = 0, \\ \frac{d^2A}{dx^2} + 2p\frac{d^2A}{dxdz} + p^2\frac{d^2A}{dz^2} = 0 \end{gathered} \qquad \text{(F)}$$

reducirt. — Integrirt man die drei letzten dieſer Gleichungen, was leicht geſchehen kann, wenn man ſetzt:

$$u = \frac{dA}{dx} + p\frac{dA}{dz}, \quad v = \frac{dA}{dy} + q\frac{dA}{dz};$$

ſo findet man:

$$u = \varphi(z - px - qy, p, q), \quad v = \psi(z - px - qy, p, q),$$

$$A = x\varphi(z - px - qy, p, q) + y\psi(z - px - qy, p, q)$$

$$+ \chi(z - px - qy, p, q). \tag{G}$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die erſte der Gleichungen (F), und ſetzt der Kürze wegen:

$$z - px - py = \omega;$$

ſo erhält man:

$$\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dq} = -\left(x\frac{d\varphi}{dz} + y\frac{d\psi}{dz} + \frac{d\chi}{dz}\right) = -\left(x\frac{d\varphi}{d\omega} + y\frac{d\psi}{d\omega} + \frac{d\chi}{d\omega}\right).$$

Die Integration nach ω gibt:

$$x\varphi + y\psi + \chi = -\int\left(\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dq}\right)d\omega + F(p, q).$$

Subſtituirt man dieſen Werth in (F), ſetzt für φ, ψ reſp.: $-\frac{d\varphi}{d\omega}$, $-\frac{d\psi}{d\omega}$, und läßt $F(p, q)$ hinweg, was offenbar erlaubt iſt; ſo erhält man:

$$A = \frac{d\Phi}{dp} + \frac{d\Psi}{dq}. \tag{H}$$

Wenn P das aus dem Anfangspunkte auf die Berührungsebene in irgend einem Punkte der Fläche gefällte Perpendikel iſt, ſo hat man bekanntlich:

$$P = \frac{\omega}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}.$$

Der obige Werth von A kann alſo auf die Form gebracht werden:

$$A = \frac{d\Phi(P, p, q)}{dp} + \frac{d\Psi(P, p, q)}{dq}, \tag{I}$$

welches der allgemeinſte Werth von A iſt, der das Differential:

$$A(rt - s^2)\,dxdy$$

integrabel macht, d. h. ſo, daß der Werth des Integrales:

$$\iint A(rt - s^2)\,dxdy$$

nur von der Natur der Grenzcurve, sowie von den Werthen von z und seiner Differentialquotienten für die entsprechenden Punkte der krummen Fläche abhängt. —

Man hat demnach das folgende Theorem:

„Wenn mehrere Flächen sich in derselben Curve berühren, so ist der Werth des Integrales:

$$\iint A dp dq, \qquad (K)$$

auf den von der Berührungscurve begrenzten Theil irgend einer dieser Flächen erstreckt, für alle diese Flächen derselbe." —

Die Wahrheit dieses Theoremes wird einleuchtend, wenn man beachtet, daß:

$$dpdq = (rt - s^2)\,dxdy$$

ist. Denn aus der vorhergehenden Untersuchung erhellet, daß die Variation des bestimmten Integrales nur die Variationen der Grenzwerthe von y, z und p oder q enthält (Nr. 106); diese Variation verschwindet also, weil die Flächen eine gemeinschaftliche Berührungscurve haben. — Der Werth des Integrales bleibt mithin constant, wenn man von einer dieser Flächen zu einer andern übergeht. — Derselbe Schluß bleibt auch gültig, wenn die Fläche ganz geschlossen ist; d. h. der Werth des Integrales (K) ist in diesem Falle für alle geschlossenen Flächen derselbe, weil die Variationen der Grenzwerthe an und für sich verschwinden.*) — Man hat also den Satz:

---

*) Dies erhellet vielleicht noch besser, wenn Polarcoordinaten in das Integral eingeführt werden, indem der Anfangspunkt oder Pol in der Fläche liegt. — Denn alsdann nimmt dasselbe die Form:

$$\iint V' d\theta d\varphi$$

an. — Die Gleichungen der Grenzcurven sind aber im Allgemeinen von der Form:

$$\theta = f_1(\varphi), \quad \theta = f_0(\varphi),$$

und die in der Variation von:

$$\iint V' d\theta d\varphi$$

vorkommenden einfachen Integrale werden durch den ganzen Umfang jeder dieser Curven erstreckt angenommen — sie verschwinden also, weil sich diese Curven bei ganz geschlossenen Flächen auf Punkte reduciren. —

Wenn die Berührungsebene in irgend einem Punkte einer krummen Fläche dieſe nach einer **geſchloſſenen** Curve berührt, ſo iſt der Werth des auf den ganzen von dieſer Curve begrenzten Theil der Fläche ausgedehnten Integrales (K) = 0. — Denn nach dem vorhergehenden Theoreme iſt dieſer Werth für die krumme Fläche derſelbe, wie für die Berührungsebene. —

Beiſpiel 2.

Es ſei:

$$V = Br + 2Cs + Dt,$$

wo B, C, D Functionen von p und q ſind; ſo iſt:

$$A = 0, \quad B = f(p,q), \quad C = F(p,q), \quad D = \varphi(p,q),$$

woraus leicht erhellet, daß die Gleichungen:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \Pi = 0$$

identiſche werden, und daß die Gleichung:

$$\Theta = 0$$

wird:

$$\frac{d^2B}{dq^2} - 2\frac{d^2C}{dpdq} + \frac{d^2D}{dp^2} = 0.$$

Es iſt leicht zu zeigen, daß dieſer Gleichung durch:

$$B = \frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C = -\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad D = \frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Genüge geſchieht — und wenn man bemerkt, daß:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

iſt; ſo hat man den Satz:

„Wenn das beſtimmte Integral:

$$\iint \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dxdy$$

auf den von der Berührungscurve umſchloſſenen Theil

irgend einer der obigen Flächen erſtreckt wird, ſo iſt ſein Werth für alle dieſe Flächen derſelbe.“*) —

Aufgabe IV.

157. Man ſoll unterſuchen, ob es thunlich iſt, den Inhalt einer Fläche durch eine Formel, wie:

$$\Gamma + \iint F(P, \theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi \qquad (A)$$

auszudrücken, wo Γ eine Größe iſt, die ſich nur auf die Integrationsgrenzen bezieht, P das Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Berührungsebene der Fläche, und θ, φ die Winkel bedeuten, welche ſeine Richtung beſtimmen.**) —

Aufl. Die bei allen ſolchen Aufgaben, wie die vorliegende, anzuwendende Methode iſt folgende: Es ſei:

$$\iint V dx dy$$

ein Integral, wovon man weiß, daß es die geſuchte Größe ausdrückt, und:

---

*) Dieſer ſchon früher angeführte Satz läßt ſich durch ein partikulares Verfahren leichter darthun. — Denn ſetzt man:

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

ſo iſt leicht einzuſehen, daß man hat:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right),$$

und folglich:

$$\iint\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dx dy = \int\left(\xi \frac{dy}{dx} - \eta\right) dx = \int \frac{p\frac{dy}{dx} - q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\, dx.$$

**) Bekanntlich kann die Länge einer ebenen Curve durch einen Ausdruck von der Form:

$$\Gamma + \int P d\omega$$

dargeſtellt werden, wo P das aus dem Anfangspunkte auf die Tangente gefällte Perpendikel und ω der Winkel iſt, welchen daſſelbe mit einer feſten Axe macht, während Γ eine ſich blos auf die Integrationsgrenzen beziehende Größe iſt — und es iſt nun der Zweck unſerer Unterſuchung: ob ſich nicht die Größe der Oberfläche durch eine ähnliche Formel ausdrücken läßt? —

$$\Gamma + \iint \Pi d\theta d\varphi$$

das Integral, wodurch sie ausgedrückt werden soll, indem Π eine unbestimmte Function von θ, φ und irgend einer dritten Größe ist, wofür in dem gegenwärtigen Falle das aus dem Anfangspunkte auf die Berührungsebene gefällte Perpendikel genommen ist. — Das Integral in dem letzten Ausdrucke transformire man durch eine Vertauschung der Veränderlichen in ein anderes von der Form:

$$\iint V' dx dy,$$

so ist:

$$\iint V dx dy = \Gamma + \iint V' dx dy,$$

und mithin:

$$\iint (V - V') dx dy = \Gamma.$$

Wenn man also V' (oder Π) so bestimmen kann, daß:

$$(V - V' dx dy$$

den Bedingungen der Integrabilität genügt; so ist die Lösung der Aufgabe möglich — und im entgegengesetzten Falle nicht. —

In dem vorliegenden Falle ist aber bekanntlich:

$$\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy,$$

und wenn der Ausdruck:

$$F(P, \theta, \varphi) d\theta d\varphi$$

auf die Form:

$$V' dx dy$$

gebracht werden kann; so ist:

$$V' = (rt - s^2) f(z - px - qy, p, q)$$

und:

$$V = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Wenn also die verlangte Ausdrucksweise möglich sein soll, so muß der Ausdruck:

$$\{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} - (rt - s^2) f(z - px - qy, p, q)\} dx dy$$

integrabel sein — und in den Gleichungen der Aufgabe III ist alsdann:

$$A = -f(z - px - qy, p, q), \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0,$$
$$E = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Setzt man dieſe Werthe in:

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,$$

ſo erhält man leicht die Gleichungen:

$$\frac{d^2E}{dp^2}=0,\quad \frac{d^2E}{dpdq}=0,\quad \frac{d^2E}{dq^2}=0,$$

welche offenbar unmöglich ſind, weil E eine gegebene Function iſt. — Es iſt mithin nicht möglich, die Größe einer Oberfläche durch eine Formel wie (A) auszudrücken. —

Aufgabe V.

158. Man ſoll die allgemeine Form finden, welche V haben muß, wenn ſich der Inhalt irgend eines Stückes einer krummen Fläche durch:

$$\Gamma+\iint V d\theta d\varphi$$

ſoll ausdrücken laſſen. —

Aufl. Wenn man ſetzt:

$$A(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}=V,$$

ſo muß nach der vorhergehenden Aufgabe der Ausdruck:

$$A(rt-s^2)-\sqrt{(1+p^2+q^2)}$$

den Bedingungen der Integrabilität genügen, und es iſt mithin in den allgemeinen Formeln:

$$B=0,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=-\sqrt{(1+p^2+p^2)}.$$

Die Gleichung:

$$\Pi=0$$

wird alſo identiſch, und die Gleichungen:

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0$$

geben:

$$\frac{d^2A}{dy^2}+2q\frac{d^2A}{dydz}+q^2\frac{d^2A}{dz^2}=-\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2A}{dxdy}+p\frac{d^2A}{dydz}+q\frac{d^2A}{dxdz}+pq\frac{d^2A}{dz^2}=-\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2A}{dx^2}+2p\frac{d^2A}{dxdz}+p^2\frac{d^2A}{dz^2}=-\frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieſe letzten Gleichungen laſſen ſich leicht nach der früheren Methode integriren (S. 378) und geben:

$$A=-\tfrac{1}{2}\frac{\{x^2+y^2+(px+qy)^2\}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+x\varphi(z-px-qy,p,q)$$

$$+y\psi(z-px-qy,p,q)+\chi(z-px-qy,p,q). \qquad (a)$$

Es bleibt alſo noch die Gleichung: $\Theta=0$, oder:

$$\frac{dA}{dx}+\frac{d}{dp}\left(\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}\right)+\frac{d}{dq}\left(\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}\right)=0 \qquad (b)$$

zu betrachten übrig. — Die Gleichung (a) gibt aber:

$$\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}=-\frac{x+(px+qy)p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\varphi,$$

$$\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}=-\frac{y+(px+qy)q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\psi;$$

alſo iſt:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}\right)=-\frac{2px+qy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+3p\frac{x+(px+py)p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{d\varphi}{dp},$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}\right)=-\frac{2qy+px}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+3q\frac{y+(px+qy)q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{d\psi}{dq},$$

woraus durch Addition folgt:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}\right)+\frac{d}{dq}\left(\frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}\right)=\frac{d\varphi}{dp}+\frac{d\psi}{dq}$$

und:

$$\frac{dA}{dz}=\frac{dA}{d\omega}=x\frac{d\varphi}{d\omega}+y\frac{d\psi}{d\omega}+\frac{d\chi}{d\omega}. \quad \text{(S. 379)}$$

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung (b) und integrirt nach ω, ſo findet man:

$$x\varphi+y\psi+\chi=-\frac{d}{dp}\int\varphi d\omega-\frac{d}{dq}\int\psi d\omega+F(p,q).$$

Läßt man das Glied $F(p,q)$ hinweg, welches offenbar als in φ oder ψ ſchon mitbegriffen betrachtet werden kann, und ſetzt wieder:

$$\Phi = -\int \varphi d\omega, \quad \Psi = -\int \psi d\omega;$$

so erhält man:

$$A = -\tfrac{1}{2}\frac{x^2+y^2+(px+qy)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\Phi}{dp} + \frac{d\Psi}{dq}.$$

und folglich:

$$V = -\tfrac{1}{2}\{x^2+y^2+(px+qy)^2\} + (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{d\Phi}{dp}+\frac{d\Psi}{dq}\right).$$

Wenn man setzt:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0,$$

so erhält man den Flächeninhalt irgend eines Theiles der krummen Fläche durch:

$$\Gamma = \tfrac{1}{2}\int\int\{x^2+y^2+(px+qy)^2\}\, d\omega$$

ausgedrückt, woraus sich leicht das folgende Theorem ergibt:

Wenn in irgend einem Punkte einer geschlossenen Fläche eine Berührungsebene an diese gelegt wird, und Γ bezeichnet die Länge zwischen dem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte mit der Geraden, von welcher aus der Winkel θ gezählt wird; so wird der ganze Oberflächeninhalt S ausgedrückt durch:

$$S = -\tfrac{1}{2}\int\int T^2 d\omega.$$

Die Wahrheit dieses Satzes wird einleuchtend, wenn man bemerkt, daß:

$$T^2 = x^2+y^2+(px+qy)^2$$

ist; denn nach dem Früheren ist der Werth des Integrales:

$$\int\int(dS+\tfrac{1}{2}T^2 d\omega)$$

für alle geschlossenen Flächen derselbe. — Diese Fläche sei eine Kugelfläche, deren Gleichung ist:

$$x^2+y^2+z^2 = 1;$$

so hat man, wenn θ und φ ihre gewöhnliche Bedeutung behalten:

$$T = \tan\theta,$$

und folglich:

$$\iint T^2 d\omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \tan^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \tan^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \sin\theta\right) d\theta = -8\pi.$$

In dem Falle einer Kugelfläche hat man folglich:

$$\iint (dS + \tfrac{1}{2} T^2 d\omega) = 0,$$

und mithin ist allgemein:

$$S = -\tfrac{1}{2} \iint T^2 d\omega.$$

Es wird nicht ohne Interesse sein, diesen Satz in dem Falle einer Rotationsfläche zu verificiren. —

Es sei AB (Fig. 20) die Rotationsaxe, APB die erzeugende Curve und PE die Tangente in irgend einem Punkte; so hat man:

$$PNA = \theta, \quad T = PE = -PY \sec\theta.$$

Wenn ferner die Gleichung der Curve ist:

$$dy = p\,dx,$$

so hat man:

$$\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}, \quad T = -y\sec\theta = -y\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}.$$

Da aber T offenbar unabhängig ist von φ, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}\iint T^2 d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} T^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi \int_0^{\pi} T^2 \sin\theta\, d\theta,$$

und wenn man für θ und T ihre Werthe substituirt:

$$\tfrac{1}{2}\iint T^2\, d\omega = -\pi \int \frac{y^2 dp}{p^2\sqrt{(1+p^2)}}$$

oder theilweise integrirt:

$$\tfrac{1}{2}\iint T^2 d\omega = \pi y^2 \sqrt{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} - 2\pi \int y \sqrt{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} dy$$

$$= \pi y^2 \sqrt{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} - 2\pi \int y\sqrt{(1+p^2)}\, dx.$$

Wenn A, B die Grenzpunkte sind, so verschwindet offenbar das von dem Zeichen $\int$ freie Glied, und man hat endlich:

$$-\tfrac{1}{2}\iint T^2 d\omega = 2\pi\int y\sqrt{(1+p^2)}\,dx.$$

Der zweite Theil dieser letzten Gleichung drückt aber bekanntlich den Inhalt der durch die Umdrehung der Curve APB erzeugten Fläche aus, und folglich ist der fragliche Satz verificirt. —

Aus den vorhergehenden Beispielen sieht man, wie die Variationsrechnung bei der Untersuchung über die Möglichkeit der Reduction eines vielfachen Integrales auf ein anderes von verschiedener Form mit Vortheil benutzt werden kann. —

Aufgabe VI.

159. Wenn R, R' die Hauptkrümmungshalbmesser einer geschlossenen Fläche, P das Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Berührungsebene und $d\omega$ das Element einer mit dem der Längeneinheit gleichen Stücke dieses Perpendikels beschriebenen Kugelfläche bedeuten, zu beweisen, daß man hat:

$$\iint (R+R')\,d\omega = 2\iint P d\omega, \qquad \text{(A)}$$

wenn das Integral über die ganze geschlossene Fläche ausgedehnt wird. —

Aufl. Es ist leicht zu zeigen, daß:

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

und:

$$R+R' = -\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt-s^2}\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

$$P = \frac{z-px-qy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$$

ist. — Setzt man nun:

$$\iint V\,dx\,dy = \iint \{2P - (R=R')\}\,d\omega$$

und substituirt für R, R', P und $d\omega$ ihre obigen Werthe; so erhält man:

$$V=2\frac{z-px-qy}{(1+p^2+p^2)^2}(rt-s^2)+\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{1+p^2+q^2}. \quad (B)$$

Vergleicht man dies mit der allgemeinen Form (A) auf S. 375, ſo findet man:

$$A=2\frac{(z-px-qy)}{(1+p^2+q^2)^2}, \quad B=\frac{1+q^2}{1+p^2+q^2},$$
$$C=-\frac{pq}{1+p^2+q^2}, \quad D=\frac{1+p^2}{1+p^2+q^2}, \quad E=0. \quad (C)$$

Da aber B, C, D von x, y, z unabhängig ſind, und A den Gleichungen:

$$\frac{dA}{dx}+p\frac{dA}{dz}=0, \quad \frac{dA}{dy}+q\frac{dA}{dz}=0 \quad (D)$$

genügt; ſo iſt klar, daß die Werthe (C) die Größen L, M, N, II identiſch $=0$ machen. — Es bleibt alſo blos noch das Reſultat dieſer Subſtitutionen in Θ zu unterſuchen. — Nun iſt aber (S. 377):

$$\Theta=3\frac{dA}{dz}+\frac{d^2A}{dxdp}+\frac{d^2A}{dydq}+p\frac{d^2A}{dzdp}+q\frac{d^2A}{dzdq}$$
$$+2\frac{d^2C}{dpdq}-\frac{d^2B}{dq^2}-\frac{d^2D}{dp^2},$$

und wenn man die Gleichungen (D) reſp. nach p und q differentiirt und die Reſultate addirt; ſo findet man:

$$2\frac{dA}{dz}+\frac{d^2A}{dxdp}+\frac{d^2A}{dydq}+p\frac{d^2A}{dzdp}+q\frac{d^2A}{dzdq}=0,$$

wodurch ſich der Werth von Θ auf:

$$\Theta=\frac{dA}{dz}+2\frac{d^2C}{dpdq}-\frac{d^2B}{dq^2}-\frac{d^2D}{dp^2}$$
$$=\frac{dA}{dz}+\frac{d}{dp}\left(\frac{dC}{dq}-\frac{dD}{dp}\right)+\frac{d}{dq}\left(\frac{dC}{dp}-\frac{dB}{dq}\right)$$

reducirt. — Es iſt aber:

$$\frac{dC}{dq} = \frac{-p}{1+p^2+q^2} + \frac{2pq^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$\frac{dD}{dp} = \frac{2pq^2}{(1+p^2+q^2)^2};$$

folglich:

$$\frac{dC}{dq} - \frac{dD}{dp} = \frac{-p}{1+p^2+q^2}$$

und mithin:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dC}{dq} - \frac{dD}{dp}\right) = -\frac{1}{1+p^2+q^2} + \frac{2p^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Ebenso findet man:

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{dC}{dp} - \frac{dB}{dq}\right) = -\frac{1}{1+p^2+q^2} + \frac{2p^2}{(1+p^2+q^2)^2};$$

also ist:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dC}{dq} - \frac{dD}{dq}\right) + \frac{d}{dq}\left(\frac{dC}{dp} - \frac{dB}{dq}\right) = -\frac{2}{(1+p^2+q^2)^2} = -\frac{dA}{dz},$$

und folglich:

$$\ominus = 0.$$

Da aber die Integrale nach der Voraussetzung über die ganze geschlossene Fläche erstreckt werden, so ist die Totalvariation von:

$$\iint V dx dy, \text{ oder } \iint \{2P - (R+R')\} d\omega$$

offenbar identisch $= 0$, und folglich hat dieses Integral für alle geschlossenen Flächen denselben Werth. — Kann man also diesen Werth für irgend eine solche Fläche finden, so hat man damit auch den allgemeinen Werth desselben. — Für eine um den Anfangspunkt beschriebene Kugelfläche ist aber:

$$R + R' = 2R = 2P,$$

folglich:

$$\iint \{2P - (R+R')\} d\omega = 0,$$

und endlich allgemein:

$$\iint (R+R') d\omega = 2\iint P d\omega,$$

was bewiesen werden sollte. —

Wenn dS das Element der Fläche ist, und auf der linken Seite der letzten Gleichung für $d\omega$ sein Werth:

$$\frac{dS}{RR'}$$

gesetzt wird; so erhält man das neue Theorem:

$$\iint\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS = 2\iint P d\omega.$$

Andere Theoreme ähnlicher Art ergeben sich auf ähnliche Weise; aber da es sich hier nicht sowohl um Darstellung einer allgemeinen Theorie, als vielmehr um die Untersuchung specieller Aufgaben handelt, so werden die mitgetheilten Beispiele wohl hinreichend sein.

Note A.

Das auf S. 94 erwähnte Theorem läßt ſich leicht durch die Methode der Trennung der Quantitäts- und Operationsſymbole oder den ſ. g. Operationscalcul beweiſen. *) — Denn wenn Δ und Δ' reſp. das Symbol der Differentiation bedeutet, wenn dieſe reſp. nur auf K, oder nur auf u angewandt wird; ſo kann der Ausdruck:

$$\frac{d^m \cdot K\frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}}{dx^m} \pm \frac{d^{m'} \cdot K\frac{d^m u}{dx^m}}{dx^{m'}} \qquad (a)$$

offenbar geſchrieben werden:

$$\{(\Delta+\Delta')^m \Delta'^{m'} \pm (\Delta+\Delta')^{m'} \Delta'^m\} Ku$$

oder:

$$(\Delta+\Delta')^{m'} \Delta'^{m'} \{(\Delta+\Delta')^{m-m'} \pm \Delta'^{m-m'}\} Ku,$$

und es iſt leicht zu zeigen, daß jeder der beiden Ausdrücke:

$$(\Delta+\Delta')^{2n} + \Delta'^{2n},$$
$$(\Delta+\Delta')^{2n+1} - \Delta'^{2n+1}$$

durch eine Reihe von der Form:

$$\Delta^{2n} + A\Delta^{2n-2}(\Delta+\Delta')\Delta' + B\Delta^{2n-4}(\Delta+\Delta')^2\Delta'^2 + \&c. + E(\Delta+\Delta')^n \Delta'^n \qquad (b)$$

dargeſtellt werden kann, wo $A, B, \ldots$ und E Functionen von u ſind. Denn ſetzt man:

$$X = (\Delta+\Delta')\Delta',$$

ſo wird:

$$\Delta' = \frac{-\Delta \pm \sqrt{(\Delta^2+4X)}}{2}, \quad \Delta+\Delta' = \frac{\Delta \pm \sqrt{(\Delta^2+4X)}}{2};$$

*) Da der Verf. ſich mehrfach auf die Principien des Operationscalculs ſtützt, ſo wird es nicht unzweckmäßig ſein, den Leſer in dieſer Beziehung auf Carmichael's Operationscalcul, ꝛc. (Braunſchweig 1857) zu verweiſen. — S.

folglich:

$$(\Delta+\Delta')^{2n}+\Delta'^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}[\{\sqrt{(\Delta^2+4X)}+\Delta\}^{2n}+\{\sqrt{(\Delta^2+4X)}-\Delta\}^{2n}]$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\Delta^{2n}+\frac{2n.2n-1}{1.2}\Delta^{2n-2}(\Delta^2+4X)+\&c.+(\Delta^2+4X)^n\right\}.$$

Wird nun dieſer Ausdruck nach Potenzen von X geordnet, und für X ſein Werth $(\Delta+\Delta')\Delta'$ geſetzt; ſo ergibt ſich offenbar eine Reihe von der Form (b) — und daſſelbe Verfahren iſt auch auf den Ausdruck:

$$(\Delta+\Delta')^{2n+1}-\Delta'^{2n+1}$$

anwendbar. —

Subſtituirt man den ſo gefundenen Werth in:

$$(\Delta+\Delta')^{m'}\Delta'^{m'}\{(\Delta+\Delta')^{m-m'}\pm\Delta'^{m-m'}\},$$

ſo erhält man:

$$\Delta^{2n}(\Delta+\Delta')^{m'}\Delta'^{m'}+A\Delta^{2n-2}(\Delta+\Delta')^{m'+1}\Delta'^{m'+1}+\&c.,$$

wo:

$$n=\tfrac{1}{2}(m-m'),\text{ oder }=\tfrac{1}{2}(m-m'-1)$$

iſt, jenachdem $m-m'$ gerade, oder ungerade iſt. — Es iſt alſo endlich:

$$\frac{d^m K\frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}}{dx^m}\pm\frac{d^{m'}K\frac{d^m u}{dx^m}}{dx^{m'}}=\{\Delta^{2n}(\Delta+\Delta')^{m'}\Delta'^{m'}+\&c.\}Ku$$

$$=\frac{d^{m'}\frac{d^{2n}K}{dx^{2n}}\frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}}{dx^{m'}}+\frac{d^{m'+1}A\frac{d^{2n-2}K}{dx^{2n-2}}\frac{d^{m'+1}u}{dx^{m'+1}}}{dx^{m'+1}}+\text{etc.}$$

$$=\frac{d^{m'}C_{m'}\frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}}{dx^{m'}}+\frac{d^{m'+1}C_{m'+1}\frac{d^{m'+1}u}{dx^{m'+1}}}{dx^{m'+1}}+\&c.,$$

wo geſetzt iſt:

$$C_{m'}=\frac{d^{2n}K}{dx^{2n}},\quad C_{m+1}=A\frac{d^{2n-2}K}{dx^{2n-2}}+\&c.$$

Note B.

Das Theorem:

$$P\frac{d^mQ}{dx^m} = \frac{d^mPQ}{dx^m} - \frac{m}{1}\frac{d^{m-1}P'Q}{dx^{m-1}} + \frac{m.m-1}{1.2}\frac{d^{m-2}P''Q}{dx^{m-2}} - \&c.$$

$$+ (-1)^m P^{(m)}Q, \qquad (a)$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$P' = \frac{dP}{dx}, \quad P'' = \frac{d^2P}{dx^2}, \ldots P^{(m)} = \frac{d^mP}{dx^m},$$

ergibt sich leicht durch Anwendung des Operationscalculs (s. Carmichael's Operationscalcul S. 17). Multiplicirt man die Gleichung:

$$Au + \frac{d.A_1\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d^2.A_2\frac{d^2u}{dx^2}}{dx^2} + \&c. = 0 \qquad (b)$$

mit ut, zieht das Resultat von dem Werthe von U ab, und setzt für y seinen Werth ut; so bekommt man:

$$U = u\frac{d.A_1\frac{d.ut}{dx}}{dx} + u\frac{d^2.A_2\frac{d^2.ut}{dx^2}}{dx^2} + \&c.$$

$$- ut\frac{d.A_1\frac{du}{dx}}{dx} - ut\frac{d^2.A_2\frac{d^2u}{dx^2}}{dx^2} - \&c.,$$

oder in kürzerer Form:

$$U = \Sigma\left(u\frac{d^m.A_m\frac{d^mut}{dx^m}}{dx^m} - ut\frac{d^m.A_m\frac{d^mu}{dx^m}}{dx^m}\right), \qquad (c)$$

wo m alle Werthe von 1 bis n haben muß. — Wir wollen nun zeigen, daß jedes Glied der vorigen Summe durch eine Reihe von der Form:

$$\frac{d.b_1\frac{dt}{dx}}{dx} + \frac{d^2.b_2\frac{d^2t}{dx^2}}{dx^2} + \&c.$$

ausgedrückt werden kann. — Wendet man nämlich das Theorem (a) an, und setzt:

$$\frac{d^m . ut}{dx^m} = (ut)^m, \quad \frac{du}{dx} = u', \text{ \&c.};$$

ſo ergibt ſich:

$$u\frac{d^m . A_m (ut)^m}{dx^m} = \frac{d^m . uA_m (ut)^m}{dx^m} - \frac{m}{1}\frac{d^{m-1} . u' A_m (ut)^m}{dx^{m-1}}$$

$$+ \frac{m . m-1}{1 . 2}\frac{d^{m-2} . u'' A_m (ut)^m}{dx^{m-2}} - \text{\&c.} \qquad \text{(d)}$$

Es iſt aber auch:

$$(ut)^m = ut^{(m)} + mu't^{(m-1)} + \frac{m . m-1}{1 . 2} u''t^{(m-2)} + \text{\&c.},$$

und wenn dieſer Werth von $(ut)^m$ in (d) ſubſtituirt wird; ſo kann das allgemeine Glied der reſultirenden Reihe durch:

$$M\frac{d^p . u^{(m-p)} A_m u^{(m-q)} t^{(q)}}{dx^p} \qquad (\alpha)$$

ausgedrückt werden, wo offenbar:

$$M = \pm \frac{m . m-1 \ldots p+1}{1.2.3 \ldots m-p} \cdot \frac{m . m-1 \ldots q+1}{1.2.3 \ldots m-q}$$

iſt, und das obere, oder untere Zeichen genommen werden muß, jenachdem $m-p$ gerade, oder ungerade iſt. — Iſt nun p nicht $= q$, ſo erhellet aus der Form dieſes Ausdruckes (α), daß es auch ein anderes Glied:

$$\pm M\frac{d^q . u^{(m-q)} A_m u^{(m-p)} t^{(p)}}{dx^q}$$

geben muß, wo das obere, oder untere Zeichen gilt, jenachdem $p - q$ gerade, oder ungerade iſt. — Setzt man jetzt:

$$K = MA_m u^{(m-p)} u^{(m-q)},$$

ſo erhellet auf der Stelle, daß alle Glieder der Reihe (c), mit Ausnahme des Gliedes, für welches $p = q$ iſt, und welches ſchon die verlangte Form hat, in Gruppen von der Form:

$$\left(\frac{d^p . K\frac{d^q t}{dx^q}}{dx^p} \pm \frac{d^q . K\frac{d^p t}{dx^p}}{dx^q} \right)$$

geordnet werden können. Nach der vorhergehenden Note A kann aber eine solche Gruppe durch eine Reihe wie:

$$\frac{d^q . C_q \frac{d^q t}{dx^q}}{dx^q} + \frac{d^{q+1} . C_{q+1} \frac{d^{q+1} t}{dx^{q+1}}}{dx^{q+1}} + \&c.$$

ausgedrückt werden, und es ist mithin:

$$\Sigma u \frac{d^m . A_m (ut)^m}{dx^m} = Ct + \frac{d . C_1 \frac{dt}{dx}}{dx} + \frac{d^2 . C_2 \frac{d^2 t}{dx^2}}{dx^2} + \&c. + \frac{d^n . C_n \frac{d^n t}{dx^n}}{dx^n} \qquad (e)$$

Der Coefficient von t in:

$$\Sigma . u \frac{d^m . A_m (ut)^m}{dx^m}$$

ist aber offenbar:

$$\Sigma . u \frac{d^m . A_m \frac{d^m u}{dx^m}}{dx^m},$$

und folglich:

$$\Sigma . ut \frac{d^m . A_m \frac{d^m u}{dx^m}}{dx^m} = Ct.$$

Substituirt man diesen Werth in (c), und setzt für C_1, C_2, ... resp. b_1, b_2, ..; so erhält man:

$$U = \Sigma \left(u \frac{d^m . A_m \frac{d^m . ut}{dx^m}}{dx^m} - ut \frac{d^m . A_m \frac{d^m u}{dx^m}}{dx^m} \right)$$

$$= \frac{d . b_1 \frac{dt}{dx}}{dx} + \frac{d^2 . b_2 \frac{d^2 t}{dx^2}}{dx^2} + \&c. + \frac{d^n . b_n \frac{d^n t}{dx^n}}{dx^n},$$

und also endlich:

$$\int U dx = b_1 \frac{dt}{dx} + \frac{d . b_2 \frac{d^2 t}{dx^2}}{dx} + \&c. + \frac{d^{n-1} . b_n \frac{d^n t}{dx^n}}{dx^{n-1}} . \qquad (f)$$

Note C.

Die Theoreme auf S. 169, 204 und 306 beziehen sich eigentlich nur auf ganze Functionen — lassen sich aber leicht auf gebrochene Functionen ausdehnen. Ist z. B.:

$$\mu = \frac{\mu'}{\mu''},$$

wo μ', μ'' ganze Functionen resp. vom m'ten und m''ten Grade sind; so hat man:

$$\frac{1}{\mu}\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu}{dy}\right)=\frac{1}{\mu'}\left(\cos\alpha\frac{d\mu'}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu'}{dy}\right)$$
$$-\frac{1}{\mu''}\left(\cos\alpha\frac{d\mu''}{dx}+\cos\beta\frac{d\mu''}{dy}\right).$$

Wird alsdann die im Texte angegebene Construction für jede der Curven:

$$\mu' = c', \quad \mu'' = c''$$

einzeln ausgeführt, und die entsprechenden Stücke der Normale durch:

$$PN', \quad PN''$$

dargestellt; so erhält man durch das im Texte angegebene Verfahren:

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{m'}{PN'} - \frac{m''}{PN''},$$

und ebenso für die Theoreme auf S. 204 und 306.

Note D.

Delaunay hat gezeigt: daß die **gesuchte** Curve durch den Brenn**punkt** einer Ellipse oder Hyperbel beschrieben wird, deren Queraxe $= a$ ist, und welche ohne Gleiten auf der Abscissenaxe fortrollt. —

Es sei:

$$r = f(\omega), \qquad (a)$$

die Gleichung der rollenden Curve in Polarcoordinaten, indem der beschreibende Punkt der Pol ist, und die der beschriebenen Curve:

$$y = \varphi(x), \text{ oder } dy = p\,dx; \qquad \text{(b)}$$

so ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$\frac{dr}{r\,d\omega} = p, \quad \frac{r^2\,d\omega}{\sqrt{(dr^2 + r^2\,d\omega^2)}} = y, \qquad \text{(c)}$$

mittelst welcher man leicht von der rollenden Curve zu der beschriebenen, und umgekehrt, übergeht. — Denn wenn die rollende Curve gegeben ist, so erhält man die Gleichung der beschriebenen Curve durch Elimination von r und ω zwischen den Gleichungen (a) und (c) — und wenn die Gleichung der beschriebenen Curve gegeben ist; so ergibt sich die der rollenden durch Elimination von x und y zwischen (b) und (c). — Dies gibt zuweilen ein Mittel zur Construction einer Curve an die Hand, deren Differentialgleichung

$$y = f(p)$$

gegeben ist. — Denn wenn man in dem vorliegenden Falle, wo die Gleichung der beschriebenen Curve ist:

$$ay = (y^2 + c)\sqrt{(1 + p^2)},$$

für y und p ihre durch die Gleichungen (c) gegebenen Werthe setzt; so erhält man als Differentialgleichung der rollenden Curve:

$$d\omega = \frac{\sqrt{(c)}\,dr}{r\sqrt{(ar - r^2 - c)}},$$

durch deren Integration man erhält:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{2c} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4c^2} - \frac{1}{c}\right)}\cos\omega,$$

d. h. die Brennpunktsgleichung eines Kegelschnittes. — Vergleicht man diese Gleichung mit der gewöhnlichen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e\cos\omega}{A(1 - e^2)},$$

so findet man:

$$A = \tfrac{1}{2}a, \quad e = \sqrt{\left(1 - \frac{4c}{a^2}\right)},$$

woraus der zu beweisende Satz erhellet. —

Für $c = 0$ geht der Kegelschnitt in eine endliche gerade Linie, und die beschriebene Curve in einen Kreis über, wie in Nr. 76.

Bei dieſer Aufgabe findet die zu Ende von Nr. 36 erörterte Eigenthümlichkeit ſtatt — nämlich: daß die durch die Variationsrechnung gefundene Gleichung nicht alle Fälle enthält, welche möglicher Weiſe vorkommen können. — Denn in Nr. 36 haben wir geſehen, daß, wenn die Curve die Rotationsaxe ſchneidet, $c = 0$ ſein muß, und daß in dieſem Falle die geſuchte Curve ein Kreis iſt. — Daſſelbe erhellet aus der vorhergehenden Conſtruction; denn die von dem Brennpunkte eines auf einer Geraden fortrollenden Kegelſchnittes beſchriebene Curve kann die Rotationsaxe nicht ſchneiden, wenn der Kegelſchnitt nicht in eine gerade Linie übergeht. — Geſetzt nun, die urſprüngliche Aufgabe wäre folgende geweſen:

Ueber einer gegebenen Baſis AB (Fig. 17) eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu beſchreiben, daß die durch ihre Drehung um AB beſchriebene Oberfläche eine gegebene Größe habe, und zugleich das von dieſer Oberfläche begrenzte Volumen ein Maximum ſei.

Dieſe Aufgabe geſtattet offenbar eine Löſung; aber ſie wird nicht durch die Kugel gegeben, weil ihre Oberfläche eine beſtimmte Function von AB iſt, und folglich nicht einer andern gegebenen Größe gleichgemacht werden kann. — Die Auflöſung dieſer Aufgabe iſt alſo nicht in der Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{n} = \frac{2}{a}$$

enthalten. — Die zweite Variation iſt im Allgemeinen:

$$\int \left(\frac{d^2V}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2V}{dydp} \delta y \delta p + \frac{d^2V}{dp^2} \delta p^2 \right) dx,$$

und wegen:

$$V = y^2 - ay\sqrt{(1+p^2)}$$

iſt folglich:

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 2, \quad \frac{d^2V}{dydp} = -\frac{ap}{\sqrt{(1+p^2)}}, \quad \frac{d^2V}{dp^2} = -\frac{ay}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man aber für $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ ſeinen aus:

$$ay = (y^2 + c)\sqrt{(1+p^2)}$$

abgeleiteten Werth, ſo findet man:

$$\frac{d^2V}{dp^2} = -\frac{(y^2+c)^3}{a^2y^2},$$

und da nicht $c = 0$ sein kann; so wird die letzte Größe für $y = 0$ unendlich; folglich ist die Variationsmethode hier gar nicht anwendbar. —

Note E.

Die Untersuchung im Texte (Nr. 111 folg.) ist hier unvollständig; denn um allgemein darzuthun: daß die Variationsrechnung hier eine vollständig bestimmte Auflösung gibt, muß gezeigt werden: daß eine Function von zwei independenten Veränderlichen vollständig bestimmt ist durch eine partielle Differentialgleichung in Verbindung mit partikulären Bedingungen, deren Anzahl der Ordnungszahl der partiellen Differentialgleichung gleich ist, und die sich blos auf partikuläre Werthesysteme der Independenten beziehen. — Ein vollständiger, von der Natur der partikulären Bedingungen unabhängiger Beweis dieses wichtigen Theoremes ist uns bis jetzt nicht gelungen — allein der folgende, freilich nur bei einer besondern Klasse von Bedingungen anwendbare Beweis, scheint doch von einiger Bedeutung zu sein:

Es sei:

$$L = 0$$

eine partielle Differentialgleichung der $n$ten Ordnung, und wir wollen auch annehmen, daß der Werth von z und der seiner Differentialquotienten jeder Ordnung bis zu der $(n-1)$ten incl. gegeben sind, welche einem gegebenen Werthesysteme von x und y entsprechen; so ist der allgemeine Werth von z als Function von x und y vollständig bestimmt. — Denn das gegebene Werthesystem von x, y werde durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{(a)}$$

bestimmt, und die partikulären Bedingungen seien:

$$z = X, \quad \frac{dz}{dx} = X_1, \quad \&c., \quad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = X_{n-1}. \qquad \text{(b)}$$

Da aber diese Gleichungen für alle Werthe von x, y stattfinden, welche der Gleichung (a) genügen; so ist klar, daß aus der Gleichung

$z = X$ die Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{dy^2}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dy} = \frac{d^2X}{dx^2},$$

&c.

folgen, wo die Werthe von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ aus (a) abgeleitet werden. — Wenn diese Differentiationen bis zur $n$ten Ordnung incl. fortgesetzt werden, so erhält man mit $z = X$ offenbar $n + 1$ Relationen zwischen den in $L = 0$ vorkommenden Größen — und ebenso folgen aus den Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = X, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = X_2, \text{ &c., } \quad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = X_{n-1}$$

resp. $n, n-1, \ldots 2$ Gleichungen, so daß man mit $L = 0$ im Ganzen zwischen diesen Größen offenbar:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$$

Gleichungen hat, wodurch auch die Anzahl dieser Größen ausgedrückt wird. — Wenn also der Werth von z, so wie der eines Differentialquotienten desselben jeder Ordnung bis zu der $(n-1)$ten Ordnung incl. für das durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0,$$

bestimmte Werthesystem von x und y gegeben sind; so sind die demselben Werthesysteme entsprechenden Werthe aller Differentialquotienten bis zur $n$ten Ordnung incl. auch gegeben. —

Da ferner die Gleichung:

$$L = 0$$

für alle Werthe von x und y stattfinden soll, so hat man offenbar auch die Gleichungen:

$$\frac{dL}{dx} = 0, \quad \frac{dL}{dy} = 0.$$

Die Einführung der Differentialquotienten der $(n+1)$ten Ordnung gibt also zwei neue aus $L=0$ abgeleitete Gleichungen — und da jede der n Gleichungen (b) noch einmal mehr differentiirt werden kann; so ist klar, daß man daraus n neue Gleichungen erhält, so daß man im Ganzen $n+2$ neue Gleichungen bekommt — und so groß ist genau auch die Anzahl der neu eingeführten Größen, nämlich der $n+2$ Differentialquotienten der $(n+1)$ten Ordnung, welche also vollständig bestimmt sind. — Dieselben Schlüsse lassen sich offenbar auf die Differentialquotienten aller Ordnungen ausdehnen, und wir ziehen aus dem Gesagten endlich die allgemeine Folgerung:

„Wenn z eine Function von x, y ist, welche der partiellen Differentialgleichung $n$ter Ordnung:

$$L=0$$

genügt, und die einem gegebenen Werthesysteme von x, y entsprechenden Werthe von z und eines seiner Differentialquotienten bis zur $(n-1)$ten Ordnung incl. gegeben sind; so sind die demselben Werthesysteme von x, y entsprechenden Werthe aller Differentialquotienten aller Ordnungen auch gegeben.“ —

Die Function z ist demnach vollkommen bestimmt, woraus folgt, daß die n Bedingungen (b) zur Bestimmung der in dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$L=0$$

vorkommenden arbiträren Größen nothwendig und zureichend sind — und da diese Bedingungen unabhängig von einander sind; so scheint der Schluß natürlich und gerechtfertigt zu sein: daß die Bestimmtheit der Aufgabe blos von der Anzahl dieser Bedingungsgleichungen abhängt. — Gleichwohl bleibt eine allgemeinere Untersuchung der in Rede stehenden Frage immer noch zu wünschen übrig. —

Zuſatz zu Nr. 24—26.

Wenn auch die Unterſuchungen über Maxima und Minima von Ausdrücken mit beſtimmten Integralen unſtreitig wichtiger ſind, als die von Ausdrücken, wie:

$$U=f(x,y),\ U=f(x,y,z,\ldots),\ U=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\right),$$

$$U=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots z,\frac{dz}{dx},\frac{d^2z}{dz^2},\ldots\right),\ \text{&c.}$$

ſo hat der Verf. letztere in Nr. 24—26 doch wohl etwas zu kurz und ungenügend behandelt, ſo daß es wenigſtens für den erſten Anfänger nicht nutzlos ſein wird, wenn wir hier auf dieſen Gegenſtand nochmals zurückkommen. — Der Kürze und Deutlichkeit wegen wollen wir die hier vorkommenden verſchiedenen Fälle an Beiſpielen erläutern, woraus ſich der Anfänger alsdann leicht die allgemeine Regel abſtrahiren wird. —

Beiſpiel 1. — Man ſoll diejenige Form von y als Function von x finden, für welche der Ausdruck:

$$U=y(x-y)=xy-y^2$$

größer, oder kleiner wird, als bei jeder andern Form und denſelben Werthen von x. —

Aufl. Man hat:

$$\delta U=x\delta y-2y\delta y=(x-2y)\delta y,$$

alſo wegen $\delta U=0$ hier:

$$x-2y=0,\quad y=\tfrac{1}{2}x,$$

und da $\delta^2U=-2(\delta y)^2$ negativ iſt; ſo iſt $U=\frac{1}{4}x^2$ ein Maximum, d. h. bei denſelben Werthen von x größer, als bei jeder andern Form von y. —

Beiſpiel 2. — Man ſoll die Form von y, ſowie den Werth von x finden, bei welchen der Ausdruck:

$$U=y(x-y)+x(a-x)=xy-y^2+ax-x^2$$

ein Maximum, oder Minimum wird. —

Aufl. — Man hat hier:

$$DU=(x-2y)\delta y+\left[(x-2y)\frac{dy}{dx}+y+a-2x\right]dx,$$

so daß die Bedingung $DU=0$ in die beiden Gleichungen:

$$x-2y=0, \quad (1) \text{ und } (x-2y)\frac{dy}{dx}+y+a-2x=0 \qquad (2)$$

zerfällt. — Aus (1) folgt: $y=\frac{1}{2}x$, und für diesen Werth von y reducirt sich (2) auf: $y+a-2x=\frac{1}{2}x+a-2x=a-\frac{3x}{2}=0$, woraus $x=\frac{2}{3}a$ folgt. —

Für diese Werthe von y und x wird $U=\frac{a^2}{3}$, und da die zweite Totalvariation:

$$D^2U=-2\delta y^2-\tfrac{1}{2}dx^2$$

offenbar negativ ist; so ist dieser Werth von U ein Maximum.

Man hätte auch die Maximums- oder Minimumsform von y und den Maximums- oder Minimumswerth von x einzeln suchen können; denn setzt man den für y gefundenen Ausdruck $y=\frac{1}{2}x$ in den von U, so wird

$$U=ax-\tfrac{3}{4}x^2;$$

folglich:

$$\frac{dU}{dx}=a-\tfrac{3}{2}x=0, \text{ also } x=\tfrac{2}{3}a, \text{ &c.}$$

Beispiel 3. — Man soll für y eine solche Function von x suchen, daß die durch die Gleichung:

$$f(U,y,x)=U^3-6U^2y+12Uy^2-8y^3-27y^2+54xy+27x^2=0, \quad (1)$$

bestimmte Größe U ein Maximum, oder Minimum wird. —

Aufl. Man hat hier:

$$\delta U=-\left(\frac{df}{dy}:\frac{df}{dU}\right)\delta y=\frac{2U^2-8Uy+8y^2+18y-18x}{U^2-4Uy+4y^2}\delta y, \qquad (2)$$

und die Gleichung:

$$\delta U=0$$

ist mithin:

$$U^2-4Uy+4y^2+9y-9x=0. \qquad (3)$$

Durch Elimination von U zwischen (1) und (3) erhält man:

$$U = 3x - y, \tag{4}$$

und durch Substitution dieses Werthes von U in (1) und (3) ergibt sich:

$$(x-y)^2(x-y-1) = 0, \tag{5}$$

$$(x-y)\,(x-y-1) = 0, \tag{6}$$

so daß man zur Bestimmung von y die beiden Gleichungen hat:

$$x-y=0 \text{ oder } y=x \text{ und } x-y-1=0 \text{ oder } y=x-1.$$

Für $y=x-1$ wird $U=2x+1$ und $\delta^2 U = -\frac{3}{2}\delta y^2$; folglich U ein Maximum. —

Für $y=x$ wird $U=2x$, und nach (2) wird $\delta U = \frac{3}{2}\delta y$, und wenn der Ausdruck:

$$\frac{\delta U}{\delta y} = \frac{2U^2 - 8Uy + 8y^2 + 18y - 18x}{U^2 - 4Uy + 4y}$$

auf die bekannte Weise behandelt, so findet man:

$$\frac{\delta U}{\delta y} = \frac{4U\frac{dU}{dy} - 8y\frac{dU}{dy} - 8U + 16y + 18}{2U\frac{dU}{dy} - 4y\frac{dU}{dy} - 4U + 8y}$$

$$= \frac{18}{0} = \infty \text{ für } y=x \text{ und } U=2x.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man die Gleichung:

$$U^2 - 4Uy + 4y = 0$$

anwendet — und soll aus ähnlichen Gründen, wie in der Differentialrechnung, hier nicht weiter beachtet und untersucht werden — was auch der Verfasser immer gethan hat.

Wenn U als Function von x nicht vom ersten Grade wäre, so könnte man auch noch den Werth von x suchen, für welchen U ein Max. oder Min. wird. —

Beispiel 4. — Man soll für y und z solche Functionen von x suchen, daß:

$$U = xyz(x-y-z) \tag{1}$$

ein Max., oder Min. wird. —

Aufl. Man findet leicht:

$$\delta U = (x - 2y - z)xz\delta y + (x - y - 2z)xy\delta z, \qquad (2)$$

so daß man hat:

$$x - 2y - z = 0 \text{ und } x - y - 2z = 0, \qquad (3)$$

oder:

$$x - 2y - z = 0 \text{ und } y = 0, \qquad (4)$$

oder:

$$x - y - 2z = 0 \text{ und } z = 0, \qquad (5)$$

oder:

$$z = 0 \qquad \text{und } y = 0. \qquad (6)$$

Aus (3) folgt:

$$y = \tfrac{1}{2}x \text{ und } z = \tfrac{1}{2}x, \text{ also: } U = \tfrac{1}{27}x^4,$$

und da die zweite Variation:

$$\delta^2 U = -2xz\delta y^2 + 2x(x - 2y - 2z)\delta y\delta z - 2xy\delta z^2$$

auf die Form:

$$\delta^2 U = -\tfrac{3}{4}x^2[(\delta y + \tfrac{1}{2}\delta z)^2 + \tfrac{3}{4}\delta z^2]$$

gebracht werden kann; so erhellet, daß $U = \frac{1}{27}x^4$ ein Maximum ist. —

Nach (4) ist $y = 0$ und $z = x$, also $U = 0$, und da sich die zweite Variation auf:

$$\delta^2 U = -2x^2(\delta y^2 + \delta y\delta z)$$

reducirt; so findet in diesem Falle weder ein Max., noch ein Min. statt, weil δy, δz beliebige Werthe und Zeichen haben können, so daß man nicht behaupten kann: daß $\delta^2 U$ stets negativ, oder positiv bleibt. —

Ebenso ergibt sich, daß die Gleichungen (5) und (6) weder ein Maximum, noch ein Minimum geben. —

Beispiel 5. — Man soll für y und z solche Functionen von x suchen, daß die durch die Gleichung:

$$f(U, x, y, z) = U^3 - 3Uyz + 3xy^2 + z^3 = 0 \qquad (1)$$

bestimmte Größe U ein Maximum, oder Minimum wird. —

Aufl. In diesem Falle hat man:

$$\delta U = -\left(\frac{df}{dy} : \frac{df}{dU}\right)\delta y - \left(\frac{df}{dz} : \frac{df}{dU}\right)\delta z,$$

also:

$$\delta U = \frac{Uz - 2xy}{U^2 - yz}\delta y + \frac{Uy - z^2}{U^2 - yz}\delta z,$$

und folglich:

$$Uz - 2xy = 0, \quad Uy - z^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$y = \frac{U^3}{4x^2}, \quad z = \frac{U^2}{2x}.$$

Setzt man dieſe Werthe in (1), ſo erhält man:

$$(16x^3 - U^3)U^3 = 0, \text{ alſo } U = 0, \; U = 2\sqrt[3]{2}.x, \; y = 4x, \; z = 2\sqrt[3]{4}.x,$$

wo nur die reellen Werthe von $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ in Betracht gezogen werden ſollen, weil das Imaginäre vom Verf. ganz unberückſichtigt gelaſſen iſt. —

Für die drei letzten Werthe von U, y und z wird:

$$\delta^2 U = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}.x}[(\delta y - \sqrt[3]{2}\delta z)^2 + (\sqrt[3]{2}\delta z)^2],$$

ſo daß ein Maximum, oder Minimum ſtattfindet, jenachdem x negativ, oder poſitiv iſt. —

Für $U = 0$ iſt $y = 0$, $z = 0$ und $\delta U = \frac{2}{3}\delta y + \frac{2}{3}\delta z$, und wenn man die unbeſtimmten Formen näher unterſucht; ſo ergibt ſich: daß weder ein Maximum, noch ein Minimum ſtattfindet. —

Beiſpiel 6. — Man ſoll für y und z ſolche Functionen von x ſuchen, daß:

$$U = yz \tag{1}$$

ein Max., oder Min. und zugleich der Bedingung:

$$3y + 4z = x^2 \tag{2}$$

genügt wird. —

Aufl. Setzt man für z ſeinen aus (2) genommenen Werth in (1), ſo erhält man:

$$U = \tfrac{1}{4}y(x^2 - 3y),$$

folglich:

$$\delta U = \tfrac{1}{4}(x^2 - 6y)\delta y, \text{ alſo: } x^2 - 6y = 0, \; y = \frac{x^2}{6}, \; z = \frac{x^2}{8},$$

$$U = \tfrac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \text{ und } \delta^2 U = -\tfrac{1}{2}\delta y^2,$$

ſo daß mithin ein Maximum ſtattfindet. —

Wenn die Elimination von z oder y zwiſchen (1) und (2) Schwierigkeiten darbietet, ſo kann man (1) und (2) erſt variiren und δz oder δy eliminiren. —

Hiernach hat man:

$$\delta U = z\delta y + y\delta z, \tag{3}$$

$$3\delta y + 4\delta z = 0, \tag{4}$$

und wenn man δz eliminirt:

$$dU = \frac{4z - 3y}{4}\delta y, \tag{5}$$

mithin:

$$4z - 3y = 0, \quad z = \tfrac{3}{4}y;$$

folglich nach (1) und (2):

$$y = \frac{x^2}{6}, \quad z = \frac{x^2}{8}, \quad U = \tfrac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^4.$$

Nach (3) hat man ferner:

$$\delta^2 U = 2\delta y\delta z = -\tfrac{3}{2}\delta y^2,$$

wenn man für δz ſeinen Werth aus (4) ſubſtituirt. — Folglich ꝛc.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo:

$$U = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})$$

iſt; ſo haben wir:

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dy'}\delta y' + \frac{dU}{dy''}\delta y'' + \ldots + \frac{dU}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)}, \tag{1}$$

oder in der Bezeichnung des Verfaſſers (S. 15):

$$\delta U = N\delta y + P_1\delta.\frac{dy}{dx} + P_2\delta.\frac{d^2y}{dy^2} + \ldots + P_n\delta.\frac{d^n y}{dx^n}$$

$$= N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots + P_n\frac{d^n\delta y}{dx^n}. \tag{2}$$

Die Bedingung $\delta U = 0$ gibt hier folglich:

$$\frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dy'}\delta y' + \frac{dU}{dy''}\delta y'' + \ldots + \frac{dU}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)} = 0, \tag{3}$$

oder:

$$N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots + P_n\frac{d^n\delta y}{dx^n} = 0. \tag{4}$$

Aus dem S. 38 angegebenen Grunde zerfällt aber die Gleichung (3) in die einzelnen Gleichungen:

$$\frac{dU}{dy}=0,\ \frac{dU}{dy'}=0,\ \frac{dU}{dy''}=0,\ldots\frac{dU}{dy^{(n)}}=0, \tag{5}$$

oder die Gleichung (4) in die einzelnen Gleichungen:

$$N=0,\ P_1=0,\ P_2=0,\ldots P_n=0, \tag{6}$$

weil nämlich sonst durch (3) oder (4) eine Relation zwischen y, $\frac{dy}{dx},\ldots$ und δy ausgedrückt würde, was unzulässig ist. — Auch sind die Werthe von δy, $\frac{d\delta y}{dx},\ldots$ für irgend welchen Werth von x ganz unabhängig von einander, so daß keine Gleichung zwischen denselben stattfinden kann; also auch aus diesem Grunde die Gleichungen (3) und (4) resp. in die Gleichungen (5) und (6) zerfallen müssen. —

Beispiel 1. — Man soll für y eine solche Function von x suchen, daß der Ausdruck:

$$U=y^2+bxy+cy+bx^2y'+x^2y'^2 \tag{1}$$

ein Max., oder Min. wird. —

Aufl. Hier hat man:

$$\delta U=(2y+bx+c)\,\delta y+(b+2y')\,x^2\delta y', \tag{2}$$

und wegen $\delta U=0$ mithin die beiden Gleichungen:

$$(3)\quad 2y+bx+c=0; \qquad (4)\quad b+2y'=0,$$

welche zugleich stattfinden müssen. — Aus (4) folgt durch Integration:

$$2y+bx+C=0, \tag{5}$$

woraus erhellet, daß $C=c$ sein muß, wenn auch (3) erfüllt werden soll. — Man hat folglich (3) als Auflösung. —

Ferner ist:

$$\delta^2U=2(\delta y^2+x^2\delta y'^2),$$

und mithin findet für den durch (3) gegebenen Werth von y ein Minimum statt. —

Müßte nach den Bedingungen der Aufgabe $\delta y=0$ sein, so hätte

man nur die eine Gleichung (4) und deren Integral (5) als Auflösung, welches wegen der arbiträren Constante C allgemeiner ist als (3). —

Wegen $\delta^2 U = 2x^2 \delta y'^2$ findet offenbar wieder ein Min. statt. —

Wenn dagegen den Bedingungen der Aufgabe gemäß $\delta y' = 0$ sein müßte, so hätte man nur die Gleichung (3), welche sofort die Auflösung gibt — und da $\delta^2 U = 2\delta y^2$ ist; so findet wieder ein Minimum statt. —

Beispiel 2. — Man sucht für y eine solche Function von x, daß:

$$U = x^2 + 2xy^2 + (x^4 - y^2 - 4x)y' + y'^2 = 0 \qquad (1)$$

ein Max., oder Min. wird. —

Aufl. — Man findet hier:

$$\delta U = (4xy - 2yy')\delta y + (2y' + x^4 - y^2 - 4x)\delta y', \qquad (2)$$

und hat folglich die beiden Bedingungsgleichungen:

$$(3) \quad 4xy - 2yy' = 0, \qquad 2y' + x^4 - y^2 - 4x = 0. \quad (4)$$

Der Werth $y = 0$, welcher der Gleichung (3) genügt, gibt keine Function von x und genügt auch (4) nicht, so daß man die Gleichung:

$$4x - 2y' = 0, \text{ oder } 2x - y' = 0 \qquad (5)$$

mit (4) verbinden muß. — Aus (5) folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x, \text{ also: } y = x^2 + C. \qquad (6)$$

Setzt man diese Werthe für y und y' in (4), so erhält man:

$$4x + x^4 - x^4 + 2Cx^2 + C^2 - 4x = 0, \qquad (7)$$

so daß offenbar $C = 0$ sein muß, wenn (7) identisch stattfinden soll. — Nach (6) ist also $y = x^2$ die gesuchte Function. — Aber da:

$$\delta^2 U = -x^2 \delta y \delta y' + 2\delta y'^2$$

wegen der gegenseitigen Independenz und Willkür der Werthe von δy und $\delta y'$ kein unveränderliches Vorzeichen zugeschrieben werden kann; so findet weder ein Max., noch ein Min. statt. —

Wenn also auch den Bedingungsgleichungen durch eine Function y von x genügt werden kann, indem man den durch Integration ein-

geführten arbiträren Conſtanten entſprechende Werthe beilegt; ſo folgt daraus doch noch keineswegs, daß ein Max., oder Min. ſtattfinden muß, ſondern es müſſen auch die weitern Bedingungen hinſichtlich der zweiten Variation $\delta^2 U$ erfüllt werden — ganz ähnlich wie in der Differentialrechnung. —

Beiſpiel 3. — Man ſoll für y eine ſolche Function von x finden, daß der Ausdruck:

$$U = y^2(1 + y'^2) - a(x + yy') \tag{1}$$

ein Max., oder Min. wird. —

Aufl. Man hat hier:

$$\delta U = (2y(1 + y'^2) - ay')\,\delta y + (2y^2 y' - ay)\delta y', \tag{2}$$

mithin die beiden Gleichungen:

$$(3) \qquad 2y(1+y'^2) - ay' = 0, \qquad 2y^2 y' - ay = 0. \qquad (4)$$

Der Gleichung (4) und auch (3) wird durch $y = 0$ genügt; allein dies gibt weder für y eine Function von x, noch ein Max., oder Min., weil ſich die zweite Variation auf:

$$\delta^2 U = +2\delta y - 2a\delta y dy'$$

reducirt, welcher Ausdruck wegen der Independenz und Willkür der Werthe von δy und $\delta y'$ nicht ſtets daſſelbe Zeichen behalten muß:

Nach Weglaſſung des Factors y wird die Gleichung (4) offenbar:

$$2yy' - a = 0; \tag{5}$$

allein die Gleichungen (3) und (5) können nicht gleichzeitig ſtattfinden; denn ſetzt man z. B. den aus (5) gezogenen Werth von y in (3), ſo erhält man $a = 0$.

Müßte aber nach den Bedingungen der Aufgabe $\delta y = 0$ ſein, ſo hätte man nur die eine Gleichung (4) oder vielmehr (5), woraus durch Integration folgt:

$$y^2 = ax + C,$$

und da $\delta^2 U = 2y^2 \delta y'^2$ wird; ſo findet ein Minimum ſtatt. —

Wenn nach den Bedingungen der Aufgabe $\delta y' = 0$ ſein müßte, ſo hätte man blos die eine Gleichung (3), welcher, wie ſchon bemerkt, durch $y = 0$ genügt wird, und da $\delta^2 U = 2\delta^2 y$ wird; ſo findet ein Min. ſtatt. —

Aus (3) ſelbſt folgt:

$$\frac{dy'}{dx} = y' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16y^2}}{4y}, \text{ alſo: } \frac{dx}{dy} = \frac{4y}{a + \sqrt{a^2 - 16y^2}}$$

und wenn man $\sqrt{a^2 - 16y^2} = z$ ſetzt:

$$dx = -\tfrac{1}{4}\frac{z}{z+a}dz = -\tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{a}{z+a}\right)dz = -\tfrac{1}{4}dz + \frac{a\,dz}{a+z};$$

folglich:

$$x = -\tfrac{1}{4}z + \frac{a}{4}\log(a+z) + C,$$

und endlich, wenn für z ſein Werth reſtituirt wird:

$$x = -\tfrac{1}{4}\sqrt{a^2 - 16y^2} + \frac{a}{4}\log\left(a + \sqrt{a^2 - 16y^2}\right) + C.$$

Da ſich in dieſem Falle die zweite Variation auf $\delta^2 U = 2(1 + y'^2)\delta y^2$ reducirt, ſo findet ein Minimum ſtatt. —

Beiſpiel 4. — Man ſoll für y eine ſolche Function von x finden, daß der Ausdruck:

$$U = y''^2 + y'^2 - yy' + (3x - 5)y' + (1 - 6x)y + y^2 \quad (1)$$

ein Max., oder Min. wird —

Aufl. 1. Man findet leicht:

$$\delta U = 2y''\delta y'' + (2y' - y + 3x - 5)\delta y' + (1 - 6x + 2y - y')\delta y, \quad (2)$$

und hat folglich die drei Gleichungen:

$$(3)\ y'' = 0, \quad (4)\ 2y' - y + 3x - 5 = 0, \quad (5)\ 1 - 6x + 2y - y' = 0.$$

Aus (3) folgt:

$$y' = A, \quad y = Ax + B, \quad (6)$$

und wenn man dieſe Werthe (6) in (4) und (5) ſubſtituirt; ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$(7)\ 2A - B - 5 - x(A - 3) = 0, \quad 2x(A-3) + 1 + 2B - A = 0, \quad (8)$$

welche offenbar für $A = 3$ und $B = 1$ identiſch erfüllt werden. — Für dieſe Werthe von A und B wird nach (6):

$$y = 3x + 1,$$

und die zweite Variation wird:

$$\delta^2 U = 2\delta y''^2 + (\delta y' - \delta y)^2 + \delta y'^2 + \delta y^2,$$

so daß folglich ein Minimum ſtattfindet. —

Aufl. 2. Oder man eliminire y' zwiſchen (4) und (5), ſo erhält man ſofort $y = 3x + 1$, alſo $y' = 3$, $y'' = 0$, und wenn man dieſe Werthe in (3), (4), (5) ſetzt; ſo findet man, daß dieſe Gleichungen identiſch werden; folglich iſt $y = 3x + 1$ die geſuchte Function. —

Wenn nach den Bedingungen der Aufgabe $\delta y = 0$ ſein müßte, ſo hätte man nur die Gleichungen (3) und (4), alſo wieder $y = 3x + 1$ und:

$$\delta^2 U = 2(\delta y''^2 + \delta y'^2),$$

ſo daß wieder ein Min. ſtattfände. —

Müßte $\delta y' = 0$ ſein, ſo hätte man nur die zwei Gleichungen (3) und (5), alſo wieder $y = 3x + 1$, und wegen $\delta^2 U = 2(\delta y''^2 + \delta y^2)$ fände wieder ein Min. ſtatt. —

Müßte $\delta y'' = 0$ ſein, ſo hatte man nur die beiden Gleichungen (4) und (5), alſo wieder $y = 3x + 1$, und da:

$$\delta^2 U = (\delta y' - \delta y)^2 + \delta y'^2 + \delta y^2$$

wird; ſo fände wieder ein Min. ſtatt. —

Wenn zugleich $\delta y' = 0$ und $\delta y = 0$ ſein müßte, ſo hätte man blos die eine Gleichung (3), alſo wieder:

$$y = Ax + B,$$

und wegen $\delta^2 U = 2\delta y''^2$ fände wieder ein Min. ſtatt. —

Müßte zugleich $\delta y = 0$ und $\delta y'' = 0$ ſein, ſo hätte man nur die eine Gleichung (4), für welche $e^{-\frac{1}{2}x}$ der integrirende Factor und:

$$y = 3x + 1 + Ce^{\frac{1}{2}x}$$

das Integral iſt. — Da ferner $\delta^2 U = 2\delta y'^2$ wird, ſo findet wieder ein Minimum ſtatt. —

Müßte zugleich $\delta y' = 0$ und $\delta y'' = 0$ ſein, ſo hätte man nur die eine Gleichung (5), für welche e^{-2x} der integrirende Factor und:

$$y = 3x + 1 + C'e^{2x}$$

das Integral ist. — Wegen $\delta^2 U = 2\delta y^2$ findet wieder ein Minimum statt. —

Wenn:

$$U = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}; z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right)$$

$$= f(x, y, y', \ldots y^{(n)}; z, z', \ldots z^{(m)})$$

ist, und für y und z solche Functionen von x gesucht werden, daß U ein Max., oder Min. wird; so hat man:

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dy'}\delta y' + \ldots + \frac{dU}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)}$$

$$+ \frac{dU}{dz}\delta z + \frac{dU}{dz'}\delta z' + \ldots + \frac{dU}{dz^{(m)}}\delta z^{(m)}. \qquad (1)$$

Die Gleichung $\delta U = 0$ zerfällt also in die beiden Systeme von einzelnen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dy} = 0, \frac{dU}{dy'} = 0, \ldots \frac{dU}{dy^{(m)}} = 0, \\ \frac{dU}{dz} = 0, \frac{dU}{dz'} = 0, \ldots \frac{dU}{dz^{(m)}} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

welche gleichzeitig erfüllt werden müssen — und zugleich muß $\delta^2 U$ stets negativ, oder positiv bleiben, wenn ein Maximum, oder ein Minimum stattfinden soll. — Da man in diesem Falle noch mehr Gleichungen zu genügen hat, so wird noch seltener ein Max., oder Min. stattfinden, wie in dem Falle einer primitive oder unabhängigen Function y — und da die Behandlung der Gleichungen (2) der frühern ganz analog ist; so fügen wir hier keine speciellen Beispiele weiter bei — und übergehen auch die nähere Betrachtung der übrigen Fälle, welche bei Functionen ohne Integrale noch vorkommen können, weil sie kein besonders großes Interesse darbieten.

Zuſätze zu Kapitel 4.

Es wird für den erſten Anfänger nicht unzweckmäßig ſein, wenn wir hier mehrere der in Kapitel 4 behandelten Aufgaben auch noch nach andern Methoden zu löſen ſuchen. —

Aufgabe 1.

Die kürzeſte Linie zu finden: 1) zwiſchen zwei gegebenen Punkten — und 2) zwiſchen zwei gegebenen Linien. —

Aufl. 1) Es ſeien (x_0, y_0), (x_1, y_1) die beiden gegebenen Punkte, ſo iſt das zu einem Minimum zu machende Integral:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} ds; \tag{1}$$

folglich:

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \delta ds, \tag{2}$$

und wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ iſt:

$$ds\,\delta.ds = dx\,\delta.dx + dy\,\delta.dy,$$

alſo:

$$\delta.ds = \frac{dx}{ds}\,\delta.dx + \frac{dy}{ds}\,\delta.dy$$

$$= \frac{dx}{ds}\,d.\delta x + \frac{dy}{ds}\,d.\delta y.$$

Setzt man dieſen Werth von $\delta.ds$ in (2) und integrirt theilweiſe, ſo ergibt ſich:

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{dx}{ds}\,d.\delta x + \frac{dy}{ds} d.\delta y \right\}$$

$$= \left\{ \frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y \right\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left\{ d.\frac{dx}{ds}\,\delta x + d.\frac{dy}{ds}\,\delta y \right\}.$$

Wegen $\delta u = 0$ hat man alſo die Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 = 0, \tag{3}$$

das Integral ist. — Wegen $\delta^2 U = 2\delta y^2$ findet wieder ein Minimum statt. —

Wenn:

$$U = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}; z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right)$$

$$= f(x, y, y', \ldots y^{(n)}; z, z', \ldots z^{(m)})$$

ist, und für y und z solche Functionen von x gesucht werden, daß U ein Max., oder Min. wird; so hat man:

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dy'}\delta y' + \ldots + \frac{dU}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)}$$

$$+ \frac{dU}{dz}\delta z + \frac{dU}{dz'}\delta z' + \ldots + \frac{dU}{dz^{(m)}}\delta z^{(m)}. \qquad (1)$$

Die Gleichung $\delta U = 0$ zerfällt also in die beiden Systeme von einzelnen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dy} = 0,\ \frac{dU}{dy'} = 0,\ \ldots\ \frac{dU}{dy^{(m)}} = 0, \\ \frac{dU}{dz} = 0,\ \frac{dU}{dz'} = 0,\ \ldots\ \frac{dU}{dz^{(m)}} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

welche gleichzeitig erfüllt werden müssen — und zugleich muß $\delta^2 U$ stets negativ, oder positiv bleiben, wenn ein Maximum, oder ein Minimum stattfinden soll. — Da man in diesem Falle noch mehr Gleichungen zu genügen hat, so wird noch seltener ein Max., oder Min. stattfinden, wie in dem Falle einer primitiven oder unabhängigen Function y — und da die Behandlung der Gleichungen (2) der frühern ganz analog ist; so fügen wir hier keine speciellen Beispiele weiter bei — und übergehen auch die nähere Betrachtung der übrigen Fälle, welche bei Functionen ohne Integrale noch vorkommen können, weil sie kein besonders großes Interesse darbieten.

Zusätze zu Kapitel 4.

Es wird für den ersten Anfänger nicht unzweckmäßig sein, wenn wir hier mehrere der in Kapitel 4 behandelten Aufgaben auch noch nach andern Methoden zu lösen suchen. —

Aufgabe 1.

Die kürzeste Linie zu finden: 1) zwischen zwei gegebenen Punkten — und 2) zwischen zwei gegebenen Linien. —

Aufl. 1) Es seien (x_0, y_0), (x_1, y_1) die beiden gegebenen Punkte, so ist das zu einem Minimum zu machende Integral:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} ds; \tag{1}$$

folglich:

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \delta ds, \tag{2}$$

und wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist:

$$ds\,\delta . ds = dx\,\delta . dx + dy\,\delta . dy,$$

also:

$$\delta . ds = \frac{dx}{ds}\,\delta . dx + \frac{dy}{ds}\,\delta . dy$$

$$= \frac{dx}{ds}\,d . \delta x + \frac{dy}{ds}\,d . \delta y.$$

Setzt man diesen Werth von $\delta . ds$ in (2) und integrirt theilweise, so ergibt sich:

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{dx}{ds}\,d . \delta x + \frac{dy}{ds} d . \delta y \right\}$$

$$= \left\{ \frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y \right\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left\{ d . \frac{dx}{ds}\,\delta x + d . \frac{dy}{ds}\,\delta y \right\}.$$

Wegen $\delta u = 0$ hat man also die Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 = 0, \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 = 0, \tag{3}$$

und:

$$d.\frac{dx}{ds}\,\delta x + d.\frac{dy}{ds}\,\delta y = 0;$$

folglich:

$$d.\frac{dx}{ds} = 0 \text{ und } d.\frac{dy}{ds} = 0, \tag{3'}$$

alſo:

$$\frac{dx}{ds} = a \text{ und } \frac{dy}{\delta s} = b, \tag{3''}$$

$$x = as + a' \text{ und } y = bs + b',$$

und endlich:

$$\frac{x - a'}{a} = \frac{y - b'}{b}, \tag{4}$$

d. h. die Gleichung einer Geraden. —

Man kann auch die Bemerkung benutzen: daß die Gleichungen (3') jede für ſich dieſelbe Function $y = f(x)$ geben müſſen — ſo daß dieſe beiden Gleichungen nicht independent von einander ſind; ſondern die eine eine Folge aus der andern iſt, was ſich in der That auch leicht zeigen läßt. — Denn aus der Relation:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

folgt:

$$\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d.\frac{dy}{ds} = 0,$$

und hieraus:

$$d.\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dx}\,d.\frac{dy}{ds}.$$

Man braucht alſo nur eine der Gleichungen (3') zu betrachten. Nimmt man z. B. die erſte, ſo hat man:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = a' = \text{const.},$$

mithin auch:

$$\frac{dy}{dx} = a \text{ und } y = ax + b.$$

Da die Endpunkte gegeben ſind, ſo iſt $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$; $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$; folglich geſchieht den Grenzgleichungen (3) Ge-

nüge, und da die Gleichung (4) für $x = x_0$, $y = y_0$ und $x = x_1$, $y = y_1$ erfüllt werden muß; so ist die Gleichung der gesuchten Geraden endlich:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

2) Wenn $f_0(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$ die Gleichungen der Grenzcurven sind, so bleibt die Gleichung (4) in diesem Falle dieselbe, wie im ersten Falle, und zugleich hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{df_0}{dx_0}\right)\delta x_0 + \left(\frac{df_0}{dy^0}\right)\delta y_0 &= 0, \\ \left(\frac{df_1}{dx_1}\right)\delta x_1 + \left(\frac{df_1}{dy_1}\right)\delta y_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wegen (3) und (3') folgt aus diesen letzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b\left(\frac{df_0}{dx_0}\right) - a\left(\frac{df_0}{dy_0}\right) &= 0, \\ b\left(\frac{df_1}{dx_1}\right) - a\left(\frac{df_1}{dy_1}\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und außerdem hat man $f_0(a', b') = 0$, $f_1(a', b') = 0$, wodurch also die Constanten bestimmt werden. —

Wenn die beiden Grenzcurven nicht in derselben Ebene liegen, sondern eine beliebige Lage im Raume haben, und ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= f_0(x), \quad y = f_1(x), \\ z &= f'_0(x), \quad z = f'_0(x); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

so hat man wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$:

$$ds\,\delta.ds = dx\,\delta.dx + dy\,\delta.dy + dz\,\delta.dz$$

und:

$$\delta.ds = \frac{dx}{ds}d.\delta x + \frac{dy}{ds}d.\delta y + \frac{dz}{ds}d.\delta z$$

jetzt:

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \delta . ds = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{dx}{ds} \, d.\delta x + \frac{dy}{ds} \, d.\delta y + \frac{dz}{ds} \, d.\delta z \right\}$$

$$= \left\{ \frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \left\{ d . \frac{dx}{ds} \delta x + d . \frac{dy}{ds} \delta y + d . \frac{dz}{ds} \delta z \right\}; \qquad (8)$$

mithin:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 dy_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0 \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 dy_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

und:

$$d\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} = 0, \quad d.\frac{dz}{ds} = 0; \qquad (10)$$

folglich:

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{dz}{ds} = c, \qquad (10')$$

$$x = as + a', \quad y = bs + b', \quad z = cs + c',$$

alſo:

$$\frac{x - a'}{a} = \frac{y - b'}{b} = \frac{z - c'}{c}, \qquad (11)$$

d. h. wieder die Gleichungen einer Geraden. — Die Conſtanten werden wieder wie vorhin beſtimmt — und aus (3) oder (9) erhellet: daß dieſe Gerade die Grenzlinien unter rechten Winkeln trifft. —

Oder man bemerkt: daß ſich die drei Gleichungen (10) auf zwei verſchiedene reduciren, weil dieſe die dritte zur Folge haben. — Denn aus der Relation:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

folgt:

$$\frac{dx}{ds} d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d.\frac{dz}{ds} = 0,$$

und wenn z. B. die beiden letzten der Gleichungen (10) ſtattfinden; ſo findet auch die erſte ſtatt. — Aus den beiden letzten folgt:

$$\frac{dy}{ds} = \text{const.}, \quad \frac{dz}{ds} = \text{const.}$$

also auch:

$$\frac{dy}{dx} = b, \qquad \frac{dz}{dx} = c,$$

und endlich:

$$y = bx + b', \quad z = cx + c'.$$

Aufgabe 2.

Zwischen zwei gegebenen Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) eine Curve zu beschreiben, welche, wenn sie sich um die Axe der x drehet, die kleinste Oberfläche beschreibt. —

Aufl. Hier ist bekanntlich:

$$u = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y ds;$$

folglich:

$$\delta u = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \left\{ ds\delta y + y\left(\frac{dx}{ds} d.\delta x + \frac{dy}{ds} d.\delta y\right)\right\}$$

$$= 2\pi \left\{ y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$+ 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(ds - d.y\frac{dy}{ds}\right)\delta y - d.y\frac{dx}{ds}\delta x \right\}.$$

Man hat also die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_0 \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 \right\} = 0, \\ y_1 \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 \right\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und:

$$ds - d.y\frac{dy}{ds} = 0, \quad (2)$$

$$d.y\frac{dx}{ds} = 0, \text{ also } y\frac{dx}{ds} = c. \quad (3)$$

Wegen $y\frac{dy}{ds} = y\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{ds}$ hat man folglich aus (2):

$$ds - cd \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

alſo:

$$\frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{c},$$

und wenn man integrirt; ſo findet man:

$$\log\left\{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\} = \frac{x - a}{c},$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{\frac{x-a}{c}},$$

und:

$$-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{-\frac{x-a}{c}};$$

folglich:

$$2\,\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x-a}{c}} - e^{-\frac{x-a}{c}},$$

und endlich:

$$y - b = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-a}{c}} + e^{-\frac{x-a}{c}}\right), \qquad (4)$$

d. h. die Gleichung der Kettenlinie.*) — Setzt man $y_0 = y_1$, und $x_0 = -x_1$, ſo iſt nach (4) offenbar $a = 0$, mithin:

$$y - b = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad (5)$$

---

*) Auch hier kann man die Bemerkung benutzen: daß die Gleichungen (2) und (3) dieſelbe Function $y = f(x)$ geben müſſen; alſo die eine eine Folge der andern ſein muß. — In der That hat man die identiſche Gleichung:

$$d \cdot \left(y\,\frac{dx}{ds}\right) = \left\{ds + d \cdot \left(y\,\frac{dy}{dx}\right)\right\}\frac{dy}{dx}, \qquad (\mu)$$

denn daraus folgt wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$ offenbar:

Für $x=0$ ist auch $\frac{dy}{dx}=0$; d. h. die Curve durchschneidet die Axe der y rechtwinklig — und zwar nach (3) in einem Abstande $=e$ vom Anfangspunkte, so daß wegen (5) offenbar $b=0$ ist, und die Gleichung der Kettenlinie endlich wird:

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right). \tag{6}$$

Da die Endpunkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gegeben sind, so ist $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta x_1=0$, $\delta y_1=0$; folglich werden die Grenzgleichungen (1) erfüllt — und wenn die Kettenlinie statt von zwei

---

$$\frac{dx}{ds}\,d.\left(y\frac{dx}{ds}\right)-\frac{dy}{ds}\,ds+\frac{dy}{ds}\,d.\,y\frac{dy}{dx}=0,$$

oder:

$$dy\left(\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}\right)-dy+y\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

welche letzte Gleichung wegen:

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1 \text{ und } \frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}=0$$

eine offenbare Identität ist; also auch (α).

Aus (3) folgt aber:

$$y=c\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

und hieraus:

$$dx=\frac{c\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}};$$

also:

$$x-a=c\,.\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}\right),$$

$$y+\sqrt{y^2-c^2}=ce^{\frac{x-a}{c}}$$

und:

$$y-\sqrt{y^2-c^2}=\frac{c^2}{y+\sqrt{y^2-c^2}}=c\,.\,e^{-\frac{x-a}{c}};$$

also endlich:

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-a}{c}}+e^{-\frac{x-a}{c}}\right).$$

gegebenen Punkten, von zwei gegebenen Curven begrenzt wird; ſo erhellet aus (1), daß ſie dieſelben unter rechten Winkeln trifft. –

Wegen des Uebrigen vergl. Nr. 67. —

Aufgabe 3.

Zwiſchen zwei gegebenen Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu beſchreiben: daß die von ihr ſelbſt, ihren beiden äußerſten Krümmungshalbmeſſern und dem zwiſchen dieſen liegenden Bogen ihrer Evolute begrenzte Fläche ein Minimum iſt —

Aufl. Wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer bedeutet, ſo iſt das zu einem Minimum zu machende Integral offenbar:

$$u = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \varrho\, ds;$$

folglich:

$$\delta u = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (ds\,\delta\varrho + \varrho\delta . ds).$$

Nun iſt aber bekanntlich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2x dy - d^2y dx}{ds^3},$$

mithin:

$$-\frac{\delta\varrho}{\varrho^2} = \frac{dy\, d^2\delta x - dx\, d^2\delta y + d^2x\, d\delta y - d^2y d\delta x}{ds^3} - \frac{3(d^2x\, dy - d^2y\, dx)}{ds^4}$$

$$= \ldots . - \frac{3 d\delta s}{\varrho ds}$$

und:

$$ds\,\delta\varrho + \varrho\delta . ds = -\frac{\varrho^2}{ds^2}(dy\, d^2\delta x - dx\, d^2\delta y + d^2x d\delta y - d^2y\, d\delta x) + 4\varrho\left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y\right),$$

indem für $\delta . ds$ ſein Werth geſetzt iſt. —

Durch theilweiſe Integration ergibt ſich hieraus:

$$\int_{x_0}^{x_1}(ds\,\delta\varrho+\varrho\delta.ds)=\left\{\varrho^2\frac{dx}{ds^2}d\delta y-\varrho^2\frac{dy}{ds^2}d\delta x\right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$-\left\{\left(d.\frac{\varrho^2dx}{ds^2}+\varrho^2\frac{d^2x}{ds^2}-4\varrho\frac{dy}{ds}\right)\delta y-\left(d.\frac{\varrho^2dy}{ds^2}+\varrho^2\frac{d^2y}{ds^2}+4\varrho\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left\{d\left(\varrho^2\frac{d^2x}{ds^2}-4\varrho\frac{dy}{ds}+d.\frac{\varrho^2dx}{ds^2}\right)\delta y\right.$$

$$\left.-d\left(\varrho^2\frac{d^2y}{ds^2}+4\varrho\frac{dx}{ds}+d.\frac{\varrho^2dy}{ds^2}\right)\delta x\right\},$$

und man hat folglich die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\varrho^2\frac{d^2x}{ds^2}-4\varrho\frac{dy}{ds}+d.\frac{\varrho^2dx}{ds^2}&=a,\\ \varrho^2\frac{d^2y}{ds^2}+4\varrho\frac{dx}{ds}+d.\frac{\varrho^2dy}{ds^2}&=b,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

wo a, b zwei willkürliche Conſtanten bedeuten.*) — Hieraus folgt durch Addition:

$$\varrho^2\frac{dxd^2x+dyd^2y}{ds^2}+dxd.\frac{\varrho^2dx}{ds^2}+dyd.\frac{\varrho^2dy}{ds^2}=adx+bdy,$$

$$\varrho^2\frac{d^2s}{ds}+2\varrho d\varrho+\varrho^2\frac{(dxd^2x+dyd^2y)ds^2-2ds^3d^2s}{ds^4}=adx+bdy,$$

$$\varrho^2\frac{d^2s}{ds}+2\varrho\,d\varrho-\varrho^2\frac{d^2s}{ds}=adx+bdy;$$

mithin:

$$\varrho^2=ax+by+c.\qquad(2)$$

Ebenſo ergibt ſich durch Subtraction der Gleichungen (1):

$$\varrho^2\frac{dyd^2x-dxd^2y}{ds^2}-4\varrho d\varrho+dyd.\frac{\varrho^2dx}{ds^2}-dxd.\frac{\varrho^2dy}{ds^2}=ady-bdx,$$

woraus nach einigen leichten Reductionen folgt:

$$\varrho=\tfrac{1}{2}\left(b\frac{dx}{ds}-a\frac{dy}{ds}\right).\qquad(3)$$

---

*) Von den beiden Gleichungen (1) muß auch wieder eine eine Folge aus der andern ſein. —

Sowohl (2) als (3) ist eine geometrische Definition der gesuchten Curve — und aus (2) sieht man: daß das Quadrat ihres Krümmungshalbmessers ϱ eine lineare Function der Coordinaten x, y ist.

Da ferner ϱ offenbar von dem gewählten Coordinatensysteme unabhängig ist, so kann man dasselbe, unbeschadet der Allgemeinheit der Auflösung, so wählen, daß $a = 0$, $c = 0$; folglich:

$$\varrho^2 = by \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{b}{2}\frac{dx}{ds} \qquad (5)$$

wird. — Aus (4) sieht man: daß die Curve ganz über der Axe der x liegt — und daß die Krümmung in den gleichweit von dieser Axe entfernten Punkten dieselbe ist. — Ferner erhellet aus (4) und (5): daß für $y = 0$ auch $\frac{dx}{ds} = 0$ ist — die Curve die Axe der x also unter einem rechten Winkel trifft. — Endlich folgt aus (4) und (5):

$$\frac{b}{2}\frac{dx}{ds} = \sqrt{by}\ ,$$

also:

$$dx = \frac{2y\,dy}{\sqrt{(by - 4y^2)}},$$

und:

$$x = \frac{b}{8}\arccos\left(\frac{b - 8y}{b}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{by - 4y^2},$$

d. h. die gesuchte Curve ist eine Cycloide. — Vergl. Nr. 80 folg.

Aufgabe 4.

Wenn μ eine Function von x, y ist, die Form von y so zu bestimmen, daß das Integral $u = \int_{x_0}^{x_1} \mu\,ds$ ein Maximum oder ein Minimum wird. —

Aufl. Hier ist:

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} (ds\,\delta\mu + \mu\delta\,.\,ds)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ ds\,\delta\mu + \mu\left(\frac{dx}{ds}\,d.\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,d.\,\delta y\right)\right\},$$

und:

$$\delta\mu = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)\delta y.$$

Durch theilweiſe Integration erhält man:

$$\delta u = \left\{\mu\,\frac{dx}{ds}\,\delta x + \mu\,\frac{dy}{ds}\,\delta y\right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)ds - d\left(\mu\,\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x + \left[\left(\frac{d\mu}{dy}\right)ds - d\left(\mu\,\frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y\right\},$$

und man hat mithin die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mu_0\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0\delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0\delta y_0\right\} &= 0,\\ \mu_1\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_1\delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1\delta y_1\right\} &= 0;\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)ds - d\left(\mu\,\frac{dx}{ds}\right) &= 0,\\ \left(\frac{d\mu}{dy}\right)ds - d\left(\mu\,\frac{dy}{ds}\right) &= 0.\ *)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aus (2) folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned}\mu d\frac{dx}{ds} &= \left(\frac{d\mu}{dx}\right)ds - \frac{dx}{ds}\,dy\\ &= \left(\frac{d\mu}{dx}\right)ds - \frac{dx}{ds}\left\{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)dy\right\}.\\ &= \left(\frac{d\mu}{dx}\right)\frac{dy^2}{ds} - \left(\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{dx\,dy}{ds}\\ &= \left\{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)dy - \left(\frac{d\mu}{dy}\right)dx\right\}\frac{dy}{ds},\end{aligned}\right\}$$

und ebenſo:

$$\mu d\frac{dy}{ds} = \left\{\left(\frac{d\mu}{dy}\right)dx - \left(\frac{d\mu}{dx}\right)dy\right\}\frac{dx}{ds}. \quad (3)$$

*) Von den beiden Gleichungen (2) muß nothwendig wieder die eine eine Folge aus der andern ſein. —

Addirt man die Quadrate von (3) und bemerkt, daß:

$$\frac{ds^2}{\varrho^2} = \left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2$$

iſt; ſo ergibt ſich:

$$\frac{\mu}{\varrho} = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{dx}{ds};$$

alſo:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\mu}\left\{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{dx}{ds}\right\}. \qquad (4)$$

Dieſe Gleichung drückt eine geometriſche Eigenſchaft der Curve $y = f(x)$ aus, welche das gegebene Integral zu einem Maximum, oder Minimum macht, kann aber nicht integrirt werden, ſo lange μ nicht als Function von x und y gegeben iſt. —

Wenn $\mu = y$, alſo $\frac{d\mu}{dx} = 0$, $\frac{d\mu}{dy} = 1$ iſt; ſo folgt aus (4):

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{y}\frac{dx}{ds}, \quad \varrho = -y\frac{ds}{dx};$$

d. h. der Krümmungshalbmeſſer iſt der Normale gleich und entgegengeſetzt — welches eine bekannte Eigenſchaft der Kettenlinie iſt. — Vergl. Nr. 63 folg. —

Relative Maxima und Minima.

Wenn nur eine Bedingung gemacht wird, ſo kann man ſtatt des gewöhnlichen, auch von dem Verf. angewandten Verfahrens, ſich zweckmäßiger des folgenden bedienen:

Es ſei $u = F(x, y, z, \ldots)$ die zu einem Maximum, oder Minimum zu machende Function, und $f(x, y, z, \ldots) = c$ die vorgeſchriebene Bedingung; ſo hat man offenbar die Gleichungen:

$$DF = \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z + \ldots = 0, \qquad (1)$$

$$Df = \frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z + \ldots = 0. \qquad (2)$$

Multiplicirt man die erſte dieſer beiden Gleichungen mit einem

unbeſtimmten Factor λ und zieht die zweite von dem Producte ab, ſo erhält man:

$$\left(\lambda \cdot \frac{dF}{dx} - \frac{df}{dx}\right)\delta x + \left(\lambda \cdot \frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\right)\delta y + \left(\lambda \cdot \frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\right)\delta z + \ldots = 0.$$

Man hat alſo die Gleichungen:

$$\lambda \cdot \frac{dF}{dx} - \frac{df}{dx} = 0,\ \lambda \cdot \frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy} = 0,\ \lambda \cdot \frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz} = 0, \ldots,$$

woraus offenbar folgt:

$$\frac{dF}{dx} : \frac{df}{dx} = \frac{dF}{dy} : \frac{df}{dy} = \frac{dF}{dz} : \frac{df}{dz} = \ldots = \frac{1}{\lambda};$$

d. h. man braucht nur das Verhältniß der Coefficienten derſelben Variationen in (1) und (2) gleich einer Conſtante zu ſetzen. —

Wir wollen dieſes Verfahren an einigen Beiſpielen näher erläutern. —

Aufgabe 5.

Die Curve von gegebener Länge zu finden, welche bei ihrer Rotation um die Axe der x das größte, oder kleinſte Volumen erzeugt. —

Aufl. Hier iſt:

$$u = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx \text{ und } \int_{x_0}^{x_1} ds = c;$$

folglich:

$$\delta u = \pi \int_{x_0}^{x_1} (2y dx \delta y + y^2 d \cdot \delta x)$$

$$= \pi \left[y^2 \delta x \right]_{x_0}^{x_1} - \pi \int_{x_0}^{x_1} (2y dy \delta x - 2y dx \delta y), \qquad (1)$$

und:

$$\delta c = 0 = \int_{x_0}^{x_1} \delta \cdot ds = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dx}{ds} d \cdot \delta x + \frac{dy}{ds} d \cdot \delta y \right)$$

$$= \left[\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(d \cdot \frac{dx}{ds} \delta x + d \cdot \frac{dy}{ds} \delta y \right). \qquad (2)$$

Setzt man nun das Verhältniß der Coefficienten der Varia-

Setzt man jetzt das Verhältniß der Coefficienten der Variationen δr und $\delta\theta$ unter dem Integralzeichen in (1) und (2) wieder gleich einer Conſtante λ; ſo erhält man:

$$\frac{rd\theta}{d.\frac{dr}{ds} - r\frac{d\theta^2}{ds}} = \frac{-rdr}{d.r^2\frac{d\theta}{ds}} = \pm\lambda = \pm\varrho. \qquad (3)$$

Der Krümmungshalbmeſſer ϱ der geſuchten Curve iſt alſo conſtant, und folglich iſt dieſelbe ein Kreis. *) — Um die Gleichung deſſelben zu erhalten, wollen wir den Anfangspunkt (Pol) auf der Curve ſelbſt annehmen; ſo folgt aus (3):

$$rdr = \lambda d.r^2\frac{d\theta}{ds},$$

alſo:

$$r^2 = 2\lambda r^2\frac{d\theta}{ds}, \quad ds = 2\lambda d\theta,$$

---

*) Wenn man:

$$\delta\int(ydx + \lambda ds) = 0$$

gehörig entwickelt, ſo braucht man wieder nur den Coefficienten von δx zu betrachten, welcher die Gleichung:

$$d\left(y + \lambda\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

gibt, woraus folgt:

$$y + \lambda\frac{dx}{ds} = c,$$

oder:

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = c,$$

alſo:

$$dx = \frac{(y-c)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y-c)^2}},$$

ferner:

$$x - b = \sqrt{\lambda^2 - (y-c)^2}$$

und endlich:

$$(x-b)^2 + (y-c)^2 = \lambda^2.$$

d. h.:

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 = 4\lambda^2 d\theta^2,$$

oder:

$$\frac{-dr}{\sqrt{4\lambda^2 - r^2}} = d\theta, \text{ also: } \operatorname{arc.cos}\frac{r}{2\lambda} = \theta,$$

und endlich:

$$r = 2\lambda\cos\theta. \tag{4}$$

Aus der Gleichung:

$$ds = 2\lambda d\theta$$

folgt ferner:

$$c = \int_0^{2\pi} ds = 2\lambda\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\lambda, \quad 2\lambda = \frac{c}{2\pi},$$

und mithin wird endlich (4):

$$r = \frac{c}{2\pi}\cos\theta. \tag{5}$$

Offenbar erhält man für beliebige andere Grenzen der Integrale daſſelbe Reſultat (4), ſo daß der Kreisbogen zwiſchen zwei Punkten mit den nach denſelben gehenden Vectoren — und folglich auch mit ſeiner Sehne die größte Fläche einſchließt. — Vergl. Nr. 72.

Hieraus erhellet: daß auch die von einem Kreisbogen, den Ordinaten ſeiner Endpunkte und dem entſprechenden Stücke der Abſciſſenaxe begrenzte Fläche ein Maximum, oder Minimum iſt, jenachdem der Bogen der Axe der x ſeine Concavität, oder ſeine Convexität zukehrt — wie auch aus der Anmerk. zu Nr. 61 folgt.

Wir wollen aber dieſen letzten Fall: wo zwiſchen zwei gegebenen Punkten (x_0, y_0), (x_n, y_n) die Curve von gegebener Länge geſucht wird, welche mit y_0, y_n und $x_n - x_0$ die größte, oder kleinſte Fläche einſchließt — hier noch nach einer andern Methode behandeln, welche auch in andern Fällen oft mit Vortheil angewandt werden kann. *) —

Wenn man das Interwall $x_n - x_0$ in den Punkten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in unendlich viele Theile theilt, die dieſen Punkten entſprechenden Ordinaten der geſuchten Curve reſp. mit $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bezeichnet und $y_1 - y_0 = dy_0$, $y_2 - y_1 = dy_1$, $y_3 - y_2 = dy_2, \ldots$ ſetzt; ſo wird die Fläche F dieſer Curve offenbar ausgedrückt durch:

*) Vergl. Schellbach: Probleme der Variationsrechnung in Crelle's Journal Band XLI S. 293.

$$F = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 + y_0) + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + \ldots,$$

und ihre Länge L durch:

$$L = ds_0 + ds_1 + ds_2 + \ldots.$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$+ \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \ldots.$$

Bezeichnet nun λ wieder einen constanten Factor, so ist die zu einem Maximum, oder Minimum zu machende Größe:

$$u = F + \lambda L$$

offenbar eine Function von den unendlich vielen independenten Veränderlichen $y_1, y_2, y_3, \ldots$, und wenn man die Gleichungen:

$$\frac{du}{dy_1} = 0, \quad \frac{du}{dy_2} = 0, \quad \frac{du}{dy_3} = 0, \ldots.$$

bildet; so ergibt sich, daß sie alle von der Form sind:

$$x_{m+2} - x_m - 2\lambda\left(\frac{dy_{m+1}}{ds_{m+1}} - \frac{dy_m}{ds_m}\right) = 0,$$

oder wegen $x_{m+2} - x_m = x_{m+1} + dx_{m+1} - x_m = 2dx_m + d^2x_m$ von der Form:

$$2dx_m + d^2x_m - 2\lambda \,.\, d\,.\left(\frac{dy_m}{ds_m}\right) = 0,$$

oder allgemein:

$$2dx + d^2x - 2\lambda \,.\, d\,.\frac{dy}{ds} = 0,$$

oder endlich, wenn die unendlich kleine Größe zweiter Ordnung d^2x hinweggelassen wird:

$$dx = \lambda \,.\, d\,.\frac{dy}{ds}, \tag{1}$$

woraus durch Integration folgt:

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = \lambda^2, \tag{2}$$

und die arbiträren Constanten b, c, λ wie in Nr. 72 bestimmt werden. —

Aus (2) folgt aber auch:

$$x = \lambda . \frac{dy}{ds}, \text{ also: } ds = \lambda \frac{dy}{x} = \frac{\lambda dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y-c)^2}};$$

folglich:

$$L = \int_{x_0}^{x_n} ds = \int_{x_0}^{x_n} \frac{\lambda dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y-c)^2}},$$

und:

$$\frac{L}{\lambda} = \text{arc.sin}\left(\frac{y_n - c}{\lambda}\right) - \text{arc.sin}\left(\frac{y_0 - c}{\lambda}\right),$$

also endlich:

$$(x_0 - b)(y_n - c) - (x_n - b)(y_0 - c) = \lambda^2 \sin\frac{L}{\lambda},$$

welche Relation die dritte in Nr. 72, nämlich:

$$(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 = 4\lambda^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\frac{L}{\lambda}$$

erſetzen kann. —

Hätte man $y_n - y_0$ ſtatt $x_n - x_0$ in unendlich viele Theile getheilt, ſo wäre u eine Function der unendlich vielen independenten Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ geweſen, und man hätte ebenſo die Gleichung:

$$dy = \lambda . d . \frac{dx}{ds} \tag{3}$$

erhalten — und wenn ſowohl $x_1, x_2, x_3, \ldots$ wie $y_1, y_2, y_3, \ldots$ als independent veränderlich gedacht würden; ſo fänden die Relationen (1) und (3) zugleich ſtatt, woraus zunächſt folgt:

$$x - b = \lambda \frac{dy}{ds}, \quad y - c = \lambda . \frac{dx}{ds},$$

alſo:

$$(x-b)^2 + (y-c)^2 = \lambda^2\left(\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dx^2}{ds^2}\right) = \lambda^2,$$

wie zuvor. —

Uebrigens ſieht man leicht, daß dieſe Methode von den frühern nur der Form und nicht dem Weſen nach verſchieden iſt. —

Ebenſo iſt leicht erſichtlich: daß die Jacobi'ſche Theorie bei dem von dem Verfaſſer in Kap. 4 angewandten Verfahren ebenſowenig, wie bei den in dieſen Zuſätzen befolgten Methoden anwendbar iſt, weil dieſe Theorie weſentlich vorausſetzt: daß V in $\int V dx$ von der Form:

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{da}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

ist, so daß x die independente Veränderliche ist und $y, \frac{dy}{dx}, \ldots$ Functionen derselben sind. — Auch wird dabei vorausgesetzt: daß man die Function $y = f(x, c_1, c_2, \ldots c_{2n})$ kennt, welche der Differentialgleichung:

$$\beta = 0 \text{ oder } N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \ldots (-1)^n \frac{dP_n}{dx^n} = 0$$

genügt. — Der Verfasser hat deshalb hier diese Jacobi'sche Theorie fast ganz fallen lassen — und wir wollen daher jetzt wenigstens in Bezug auf das Unterscheidungskriterium:

$$Q_n = \frac{d^2V}{\left(d\frac{d^ny}{dx^n}\right)^2} = \mp \begin{cases} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{cases}$$

noch das durchaus Nothwendige — besonders in Bezug auf relative Maxima und Minima — hinzufügen, weil eine vollständige Durchführung der Jacobi'schen Theorie zum Theil zu weitläufig und zum Theil gar nicht möglich wäre. —

(1). Für Beispiel 1 in Nr. 66 vergl. auch Nr. 30 und besonders Nr. 48, wo die Jacobi'sche Theorie vollständig durchgeführt ist. —

(2). In Beispiel 3, Nr. 69 ist offenbar:

$$V = (y + \lambda)\sqrt{1 + p^2};$$

also:

$$Q_1 = \frac{d^2V}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2V}{dp^2} = \frac{y + \lambda}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und die Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} = 0 \text{ wird: } 1 + p^2 - (y + \lambda)\frac{dp}{dx} = 0,$$

woraus folgt:

$$y + \lambda = \frac{1 + p^2}{\frac{dp}{dx}}.$$

Setzt man diesen Werth von $y + \lambda$ in den von Q_1, so erhält man:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}\,\frac{dp}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\,\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Jenachdem also $\frac{d^2y}{d^2x}$ negativ, oder positiv ist — d. h. die Kettenlinie der Drehungsaxe ihre Concavität, oder Convexität zukehrt, ist die erzeugte Oberfläche ein Maximum, oder ein Minimum. —

(3). In Beziehung auf Beispiel 1 in Nr. 72 vergl. auch Nr. 33, sowie die Anmerkung auf S. 151—152.

(4). In Beispiel 3, S. 177 ist offenbar:

$$V = y^2 + \lambda y\sqrt{1+p^2};$$

folglich:

$$Q_1 = \frac{dV}{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2V}{dp^2} = \frac{\lambda y}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und die Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{dx} = 0$$

gibt:

$$\lambda = -\frac{2y(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{1+p^2-y\frac{dp}{dx}}.$$

Substituirt man diesen Werth von λ in den von Q_1, so erhält man:

$$Q_1 = -\frac{2y^2}{1+p^2-y\frac{dp}{dx}} = -\frac{2y^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und da $\frac{d^2y}{dx^2}$ hier stets negativ ist, weil der Halbkreis der Drehungsaxe seine Concavität zukehrt; so ist Q_1 offenbar immer negativ — und es findet mithin ein Maximum statt. —

Wie man sieht, besteht dieses ganze Verfahren darin: den bei relativen Max. oder Min. in V, also auch Q_n vorkommenden

unbeſtimmten conſtanten Multiplicator λ, a, m, ... mittelſt der Gleichung $\beta = 0$, worin derſelbe offenbar auch vorkommt, aus Q_n zu eliminiren. —

Auch mag in Bezug auf iſoperimetriſche Probleme noch bemerkt werden, daß immer zwei derſelben in einer ſolchen Beziehung zu einander ſtehen: daß man für beide dieſelbe Gleichung $\beta = 0$, und folglich auch dieſelbe Auflöſung erhält. — Z. B. wenn die Curve geſucht wird, welche bei einer gegebenen Länge die größte Fläche einſchließt; ſo erhält man dieſelbe Auflöſung (den Kreis), als wenn man die Curve ſucht, welche eine gegebene Fläche umſchließen und die kleinſte Länge haben ſoll. — Denn für das erſte Problem hat man das Integral: $U = \int (y + \lambda\sqrt{1+p^2})\,dx$ zu einem Max., oder Min. zu machen, während das zweite auf das Integral $U = \int (\sqrt{1+p^2} + \lambda y)\,dx$ führt, welches offenbar, wenn man $\frac{1}{\lambda}$ ſtatt λ ſetzt, in $\frac{1}{\lambda}\int (y + \lambda\sqrt{1+p^2})\,dx$ übergeht, und folglich auf dieſelbe Beſtimmungsgleichung $\beta = 0$ führt, wie das erſte Integral. —

Weiter wollen wir hier noch wenigſtens einen Begriff von dem Gauß'ſchen und Lamé'ſchen Coordinatenſyſteme und deren Anwendung auf das

Problem der geodätiſchen Linien

geben. —

Wenn $F(x, y, z) = 0 \ldots$ (1) die Gleichung einer krummen Fläche iſt, ſo ſetzt Gauß:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta), \\ y &= f_2(\xi, \eta), \\ z &= f_3(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wo ξ, η zwei beliebige neue Veränderliche ſind. — Aus (2) ergibt ſich durch Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} dx &= a_1\,d\xi + b_1\,d\eta, \\ dy &= a_2\,d\xi + b_2\,d\eta, \\ dz &= a_3\,d\xi + b_3\,d\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und die Gleichung (1) der krummen Fläche wird:

$$\Phi(\xi, \eta) = 0. \tag{4}$$

Da ξ, η ganz willkürlich sind, so kann man sie immer so annehmen, daß sie dem gerade beabsichtigten Zwecke am besten entsprechen. — Denken wir uns also auf der Fläche (4) zwei Liniensysteme, wovon das eine entsteht, wenn sich ξ stetig ändert, während η constant bleibt — und das andere erzeugt wird, wenn η sich stetig ändert, während ξ constant ist. — Wenn η constant und ξ veränderlich ist, und man eliminirt ξ zwischen den drei Gleichungen (2); so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z und η, welche eine Curve auf der krummen Fläche bestimmen — und wenn man in diesen beiden Gleichungen alsdann η variiren läßt; so erhält man ein System solcher Curven. — Ebenso ergibt sich ein zweites Curvensystem, wenn ξ constant und η veränderlich angenommen und η eliminirt wird. — Jeder Punkt in der krummen Fläche kann folglich als der Durchschnittspunkt irgend einer Curve des ersten Systemes mit einer des zweiten betrachtet werden — und die Lage dieses Punktes auf der krummen Fläche ist bestimmt, wenn diese beiden Curven gegeben sind. — Wenn (x_0, y_0, z_0) der Punkt der krummen Fläche ist, für welchen ξ_0, η_0 die entsprechenden Werthe von ξ, η sind; so kann derselbe füglich der Anfangspunkt genannt werden, weil er der Durchschnittspunkt von ξ_0 und η_0 ist — und ξ, η können die Coordinaten jedes andern Punktes der krummen Fläche heißen, welcher der Durchschnittspunkt zweier zusammengehöriger der Curven ξ, η ist. —

Betrachten wir nun zwei einander unendlich nahe liegende Punkte (ξ, η) und $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ der krummen Fläche, wovon der erste der Durchschnittspunkt von ξ, η und der zweite der von $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ ist. — Bezeichnet ds alsdann ihren gegenseitigen Abstand, und setzt man:

$$\left.\begin{aligned} E &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \\ F &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ G &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \\ \nabla^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so hat man:

$$\nabla^2 = EG - F^2 \tag{6}$$

und:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2; \tag{7}$$

alſo:

$$s = \int_0^1 (Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

für die Länge einer zwiſchen den Punkten (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1) auf der krummen Fläche liegenden Curve. —

Die unendlich kleine Entfernung $d\sigma$ zwiſchen den beiden Punkten (ξ, η) und $(\xi + d\xi, \eta)$ iſt mithin nach (7) offenbar:

$$d\sigma = E^{\frac{1}{2}} d\xi, \tag{9}$$

und die Entfernung $d\sigma'$ zwiſchen (ξ, η) und $(\xi, \eta + d\eta)$ iſt:

$$d\sigma' = G^{\frac{1}{2}} d\eta. \tag{10}$$

Wenn ferner ω den von ξ und η in ihrem Durchſchnittspunkte gebildeten Winkel bezeichnet, ſo iſt wegen (7):

$$\cos\omega = \frac{F}{(EG)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{11}$$

Wenn θ der Winkel zwiſchen ds und der Linie des erſten Syſtems in dem Punkte (ξ, η) iſt, ſo hat man:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz}{ds(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{Ed\xi + Fd\eta}{ds \cdot E^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin\theta &= \frac{\nabla}{E^{\frac{1}{2}}} \frac{d\xi}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

und wenn θ' der Winkel zwiſchen ds und der Curve des zweiten Syſtemes in dem Punkte (ξ, η) iſt; ſo hat man ebenſo:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta' &= \frac{Fd\xi + Gd\eta}{ds G^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin\theta' &= \frac{\nabla}{G^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\xi}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Nach (8) hat man nun:

$$\delta s = 0 = \left\{\left(E\frac{d\xi}{ds}+F\frac{d\eta}{ds}\right)\delta\xi+\left(F\frac{d\xi}{ds}+G\frac{d\eta}{ds}\right)\delta\eta\right\}_0^1$$
$$-\int_0^1\left\{d\left(E\frac{d\xi}{ds}+F\frac{d\eta}{ds}\right)\delta\xi+d\left(F\frac{d\xi}{ds}+G\frac{d\eta}{ds}\right)\delta\eta\right.$$
$$\left.-\frac{d\xi^2}{2ds}\delta E-\frac{d\xi\,d\eta}{ds}\delta F-\frac{d\eta^2}{2ds}\delta G\right\}; \qquad (13)$$

aber da E, F und G Functionen von ξ und η sind, so ist:

$$\delta E=\left(\frac{dE}{d\xi}\right)\delta\xi+\left(\frac{dE}{d\eta}\right)\delta\eta$$
$$\delta F=\ldots,\quad \delta G=\ldots$$

Setzt man diese Werthe in (13), dann die Coefficienten von $\delta\xi$ und $\delta\eta$ unter dem Integralzeichen einzeln $=0$ und beachtet die Gleichungen (12) und (12′); so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} d(\cos\theta E^{\frac12})-\frac{d\xi^2}{2ds}\left(\frac{dE}{d\xi}\right)-\frac{d\xi d\eta}{ds}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)-\frac{d\eta^2}{2ds}\left(\frac{dG}{d\xi}\right)&=0,\\ d(\cos\theta' E^{\frac12})-\frac{d\eta^2}{2ds}\left(\frac{dG}{d\mu}\right)-\frac{d\eta d\xi}{ds}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)-\frac{d\xi^2}{2ds}\left(\frac{dE}{d\eta}\right)&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2\nabla d\theta&=\frac{F}{E}dE+\left(\frac{dE}{d\eta}\right)d\xi-2\left(\frac{dF}{d\xi}\right)d\xi-\left(\frac{dG}{d\xi}\right)d\eta,\\ 2\nabla d\theta'&=\frac{F}{G}dG+\left(\frac{dG}{d\xi}\right)d\eta-2\left(\frac{dF}{d\eta}\right)d\eta-\left(\frac{dE}{d\eta}\right)d\xi,\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

und aus (12), (12′) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\theta&=\frac{E}{\nabla}\frac{d\xi}{d\eta}+\frac{F}{\nabla},\\ \operatorname{cotg}\theta'&=\frac{G}{\nabla}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{F}{\nabla}.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Wenn man endlich θ, θ' mittelst (16) aus (15) eliminirt, so erhält man eine Differentialgleichung der geodätischen Linie auf der betrachteten krummen Fläche. —

Die obigen Formeln vereinfachen ſich, wenn ξ und η ſo angenommen werden, daß die Linien des einen Syſtemes die des andern unter einem Winkel von 90° ſchneiden; denn alsdann iſt $\cos\omega = 0$, und folglich nach (11) auch $F = 0$, ſo daß die Gleichungen der geodätiſchen Linie werden:

$$\left.\begin{aligned} 2(EG)^{\frac{1}{2}}\,d\theta &= \left(\frac{dE}{d\eta}\right)d\xi - \left(\frac{dG}{d\xi}\right)d\eta, \\ \operatorname{cotg}\theta &= \left(\frac{E}{G}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d\xi}{d\eta}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

indem die Gleichungen mit θ' mit dieſen identiſch werden. —

Auch die Gleichungen (17) laſſen ſich noch vereinfachen; denn wenn die Linien ξ und η geodätiſche ſind, ſo iſt $\theta = 0$, wenn $\eta = \text{const.}$ iſt. Nach der erſten der Gleichungen (17) iſt alſo $\frac{dE}{d\eta} = 0$; folglich E entweder conſtant, oder independent von η und mithin:

$$\left.\begin{aligned} 2(GE)^{\frac{1}{2}}\,d\theta &= -\left(\frac{dG}{d\xi}\right)d\eta, \\ \operatorname{cotg}\theta &= \left(\frac{E}{G}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d\xi}{d\eta}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Wegen ausführlicherer Unterſuchungen über geodätiſche Linien und deren wichtige Anwendung in Beziehung auf die Beſtimmung der Krümmung der Flächen müſſen wir auf die Abhandlung von Gauß: Disquisitiones generales circa superficies curvas, ſowie auf die neuſte von Liouville beſorgte Ausgabe von Monge's Analyse appliquée etc. Paris 1852 verweiſen. — Da aber das Problem der geodätiſchen Linien auf einem Ellipſoide für geodätiſche Zwecke von hoher Wichtigkeit iſt, ſo wollen wir daſſelbe hier mittelſt Lamé's elliptiſchen Coordinaten noch behandeln. — Zu dem Zwecke müſſen wir zunächſt einen Begriff von dieſem Coordinatenſyſteme geben. —

Lamé denkt ſich drei confocale Flächen des zweiten Grades:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

welche ſich in *demſelben* Punkte *rechtwinklig* durchſchneiden und *conjugirte* Flächen genannt werden. — Wenn $b < c$, $\lambda > c > b$, $\mu > b < c$ und $\nu < b < c$ angenommen wird, ſo iſt die erſte dieſer drei Flächen (1) ein *Ellipſoid*, und die zweite und dritte ein *Hyperboloid* mit einem, oder zwei Fach. — Läßt man nun in den Gleichungen (1) die willkürlichen Parameter λ, μ, ν ſich *ſtetig ändern*, ſo erhält man drei Syſteme oder Reihen ſich *rechtwinklig* in *demſelben* Punkte (x, y, z) durchſchneidender Flächen, ſo daß jeder Punkt des Raumes als ein ſolcher Durchſchnittspunkt betrachtet werden kann — und λ, μ, ν werden alsdann die *elliptiſchen* Coordinaten dieſes Punktes genannt. — Die Relationen zwiſchen x, y, z und λ, μ, ν ergeben ſich ganz einfach wie folgt:

Ordnet man irgend eine der Gleichungen (1), z. B. die *erſte*, nach den Potenzen von λ; ſo erhält man:

$$\lambda^6 - (b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2)\lambda^4 + [x^2(b^2 + c^2) + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2]\lambda^2 - b^2c^2x^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer letzten Gleichung ſind offenbar λ^2, μ^2, ν^2; mithin iſt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2, \\ \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2 &= x^2(b^2 + c^2) + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2, \\ \lambda^2\mu^2\nu^2 &= b^2c^2x^2, \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

und hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} bcx &= \lambda\mu\nu, \\ by(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} &= [(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)]^1, \\ cz(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} &= [(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo die zweiten Theile immer mit dem gehörigen Zeichen genommen werden müſſen. —

Daß ſich die durch die Gleichungen (1) ausgedrückten Flächen *rechtwinklig* durchſchneiden, ergibt ſich ebenfalls ſehr leicht. — Denn nimmt man irgend zwei derſelben, z. B. die beiden *letzten*, und bezeichnet mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Winkel, welche ihre Normalen in dem gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte mit den Coordinatenaxen bilden; ſo hat man:

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3$$

$$= \frac{x^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)} + \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}$$

$= 0$ wegen (2),

und daſſelbe Reſultat ergibt ſich für jede zwei andere der Gleichungen (1), woraus folgt: daß ſich die durch dieſe Gleichungen ausgedrückten Flächen unter rechten Winkeln durchſchneiden. —

Betrachten wir nun irgend einen Punkt der Ellipſoides, ſo wird daſſelbe von den beiden Hyperboloiden darin rechtwinklig geſchnitten — und wenn λ ſich unendlich wenig ändert, während μ, ν conſtant bleiben; ſo ſchreitet man auf der Normale des Ellipſoides, welche der Durchſchnitt der beiden Hyperboloide iſt, um die unendlich kleine Länge $d_\lambda s$ bis zu dem nächſtliegenden Ellipſoide fort. — Bedeuten $d_\lambda x$, $d_\lambda y$, $d_\lambda z$ die Projectionen von $d_\lambda s$ auf die drei Coordinatenaxen, ſo erhält man durch Differentiation der Logarithmen von (2) ſofort:

$$d_x x = \frac{x}{\lambda}\,d\lambda,$$

$$d_\lambda y = \frac{y\lambda}{\lambda^2-b^2}\,d\lambda,$$

$$d_\lambda z = \frac{z\lambda}{\lambda^2-c^2}\,d\lambda;$$

folglich:

$$d_\lambda s = \left(\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{p}\,d\lambda, \qquad (3)$$

wenn p das Perpendikel aus dem Mittelpunkte des Ellipſoides auf die Berührungsebene im Punkte (λ, μ, ν) bedeutet. —

Wenn μ und ν ſich ſucceſſive unendlich wenig ändern, ſo erhält man ebenſo:

$$\left.\begin{aligned} d_\mu s &= \left(\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ d_\nu s &= \left(\frac{(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

woraus ſich ſofort der Ausdruck von $ds = \sqrt{(d_\lambda s)^2 + (d_\mu s)^2 + (d_\nu s)^2}$

ergibt, durch deſſen Integration man die Länge einer Curve im Raume erhält, wenn ihre Gleichungen in elliptiſchen Coordinaten ausgedrückt ſind. —

Es ſei nun ein Punkt der geodätiſchen Linie auf dem Ellipſoide der Durchſchnittspunkt des letztern mit den beiden Hyperboloiden, welche durch die beiden letzten der Gleichungen (1) ausgedrückt werden; ſo iſt λ conſtant und μ, ν ſind die veränderlichen elliptiſchen Coordinaten dieſer geodätiſchen Linie — und zugleich iſt zu bemerken: daß Syſteme von Krümmungslinien auf dem Ellipſoide erhalten werden, wenn eine der Größen μ und ν ſich ändert, während die andere conſtant bleibt. — Ferner ſei ds das Längenelement der geodätiſchen Linie, $d_\mu s$, $d_\nu s$ ſeien ſeine Projectionen auf zwei Krümmungslinien, welche ſich im Anfangspunkte von ds ſchneiden — und ω ſei der Winkel zwiſchen ds und $d_\nu s$, alſo $\frac{\pi}{2} - \omega$ der zwiſchen ds und $d_\mu s$; ſo iſt:

$$d_\nu s = ds\cos\omega,\quad d_\mu s = ds\sin\omega \tag{5}$$

Setzt man alsdann:

$$\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)} = p,\quad \frac{(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)} = q, \tag{6}$$

ſo iſt wegen (4) offenbar:

$$d_\mu s = p^{\frac{1}{2}} d\mu,\quad d_\nu s = q^{\frac{1}{2}} d\nu; \tag{7}$$

folglich:

$$ds^2 = p d\mu^2 + q d\nu^2. \tag{8}$$

Die Länge der geodätiſchen Linien wird ausgedrückt durch:

$$u = \int_0^1 ds;$$

folglich iſt:

$$\delta u = \int_0^1 \delta . ds;$$

nun iſt aber nach (8):

$$\delta . ds = p\frac{d\mu}{ds}\,\delta . d\mu + q\frac{d\nu}{ds}\delta . d\nu + \frac{d\mu^2}{2ds}\delta p + \frac{d\nu^2}{2ds}\delta q,$$

mithin:

$$\delta u = 0 = \int_0^1 \left\{ p \frac{d\mu}{ds} d\delta\mu + q \frac{d\nu}{ds} d\delta\nu + \frac{d\mu^2}{2ds} \delta p + \frac{d\nu^2}{2ds} \delta q \right\}$$

$$= \left\{ p \frac{d\mu}{ds} \delta\mu + q \frac{d\nu}{ds} \delta\nu \right\}_0^1$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{d\mu^2}{2ds} \delta p + \frac{d\nu^2}{2ds} \delta q - d.p \frac{d\mu}{ds} \delta\mu - d.q \frac{d\nu}{ds} \right\}. \quad (9)$$

Setzt man nun:

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} = m, \quad \frac{\lambda^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} = n,$$

so daß m und n blos Functionen von μ und ν sind; so hat man:

$$p = m(\mu^2 - \nu^2), \quad q = n(\mu^2 - \nu^2), \quad (10)$$

und mithin:

$$\left.\begin{aligned} \delta p &= (\mu^2 - \nu^2)\,\delta m + 2m(\mu\delta\mu - \nu\delta\nu), \\ \delta q &= (\mu^2 - \nu)^2)\,\delta n + 2n(\mu\delta\mu - \nu\delta\nu). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Substituirt man diese Werthe in (9), so erhält man:

$$\delta u = 0 = \left\{ p \frac{d\mu}{ds} \delta\mu + q \frac{d\nu}{ds} \delta\nu \right\}_0^1$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{d\mu^2}{2ds} (\mu^2 - \nu^2) \frac{dm}{d\mu} + \frac{d\mu^2}{2ds} 2m\mu + \frac{d\nu^2}{2ds} 2n\mu - d.p \frac{d\mu}{ds} \right\} \delta\mu$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{d\nu^2}{2ds} (\mu^2 - \nu^2) \frac{dn}{d\nu} - \frac{d\nu^2}{2ds} 2n\nu - \frac{d\mu^2}{2ds} 2m\nu - d.q \frac{d\nu}{ds} \right\} \delta\nu, \quad (12)$$

und wenn man die Coefficienten von $\delta\mu$, $\delta\nu$ unter dem Integralzeichen einzeln $= 0$ setzt; so gibt der von $\delta\mu$ zunächst:

$$\frac{d\mu^2}{2ds} (\mu^2 - \nu^2) \frac{dm}{d\mu} + \frac{d\mu^2}{2ds} 2m\mu + \frac{d\nu^2}{2ds} 2n\nu - d.p \frac{d\mu}{ds} = 0. \quad (13)$$

Es ist aber:

$$d.p \frac{d\mu}{ds} = d.m(\mu^2 - \nu^2) \frac{d\mu}{ds}$$

$$= (\mu^2 - \nu^2) \frac{d\mu}{ds} dm + 2m \frac{d\mu}{ds} (\mu\delta\mu - \nu\delta\nu) + m(\mu^2 - \nu^2) d. \frac{d\mu}{ds}, \quad (14)$$

und dies in (13) ſubſtituirt, gibt:

$$m(\mu^2-\nu^2)\,d.\frac{d\mu}{ds}+\frac{\mu^2-\nu^2}{2}.\frac{d\mu dm}{ds}+2m\mu\frac{d\mu^2}{ds}-2m\nu\frac{d\mu}{ds}\delta\nu$$
$$=m\left(n\frac{d\nu^2}{ds}+m\frac{d\mu^2}{ds}\right),$$

oder für m und n ihre Werthe aus (10) geſetzt:

$$\sqrt{m}\,d.\left\{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{m}\frac{d\mu}{ds}\right\}=\frac{\mu(pd\mu^2+qd\nu^2)}{(\mu^2-\nu^2)ds}=\frac{\mu}{\mu^2-\nu^2}ds;$$

folglich:

$$\sqrt{m}(\mu^2-\nu^2)\frac{d\mu}{ds}d.\left\{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{m}\frac{d\mu}{ds}\right\}=\mu d\mu,$$

und wenn man integrirt:

$$m(\mu^2-\nu^2)^2\frac{d\mu^2}{ds^2}=\mu^2+c_1, \tag{15}$$

Ebenſo ergibt ſich aus dem Coefficienten von $\delta\nu$ in (12):

$$n(\mu^2-\nu^2)^2\frac{d\nu^2}{ds^2}=-\nu^2+c_2. \tag{16}$$

Durch Addition von (15) und (16) ergibt ſich:

$$\frac{md\mu^2+nd\nu^2}{ds^2}(\mu^2-\nu^2)^2=\mu^2-\nu^2+c_1+c_2;$$

es iſt aber:

$$md\mu^2+nd\nu^2=\frac{ds^2}{\mu^2-\nu^2};$$

folglich:

$$c_1+c_2=0,\quad c_1=-c_2=-\beta^2;$$

mithin werden (15) und (16) reſp.:

$$\left.\begin{aligned}m(\mu^2-\nu^2)\frac{d\mu^2}{ds^2}&=\mu^2-\beta^2,\\ n(\mu^2-\nu^2)\frac{d\nu^2}{ds^2}&=\beta^2-\nu^2,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

woraus durch Diviſion folgt:

$$\frac{m d\mu^2}{n d\nu^2} = \frac{\mu^2 - \beta^2}{\beta^2 - \nu^2}, \tag{18}$$

oder wenn man die Quadratwurzel auszieht und für m und n ihre Werthe setzt:

$$\left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}\right)^{\frac{1}{2}} d\mu = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}\Big)^{\frac{1}{2}} d\nu. \tag{19}$$

Da in dieſer Gleichung die Veränderlichen μ und ν getrennt ſind, ſo gibt ihre Integration ſofort die Gleichung der geodätiſchen Linie auf dem Ellipſoide, welche außer β^2 noch eine zweite, durch die letzte Integration eingeführte Conſtante enthält, die beide durch die Coordinaten der Endpunkte der geodätiſchen Linie beſtimmt werden. —

Auch die Länge s der geodätiſchen Linie wird nach dem Vorhergehenden leicht gefunden; denn man hat:

$$ds^2 = p d\mu^2 + q d\nu^2 = \frac{m(\mu^2 - \nu^2)^2}{\mu^2 - \beta^2} d\mu^2;$$

mithin:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\sqrt{m}(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}} d\mu \\ &= \frac{\sqrt{m}\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}} d\mu - \frac{\sqrt{m}\nu^2}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}} d\mu \\ &= \frac{\sqrt{m}\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}} d\mu + \frac{\sqrt{n}\nu^2}{\sqrt{\beta^2 - \nu^2}} d\nu, \end{aligned}$$

und endlich:

$$s = \sqrt{m}\int_0^1 \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}} + \sqrt{n}\int_0^1 \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}. \tag{20}$$

Weiter folgt aus (18):

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{m\nu^2 d\mu^2 + n\mu^2 d\nu^2}{m d\mu^2 + n d\nu^2} \\ &= \frac{p\nu^2 d\mu^2 + q\mu^2 d\nu}{p d\mu^2 + q d\nu^2} \\ &= \frac{\nu^2 d_\mu s^2 + \mu^2 d_\nu s^2}{ds^2} \\ &= \nu^2 \sin^2\omega + \mu^2 \cos^2\omega, \end{aligned} \tag{21}$$

welches offenbar eine Differentialgleichung ist, und eine Bedingung ausdrückt, der alle geodätischen Linien auf der Oberfläche eines Ellipsoides genügen müssen, mithin als eine Definition derselben angesehen werden kann. —

Wenn eine Reihe geodätischer Linien von einem Punkte (μ_1, ν_1) ausgehen und die Krümmungslinie (μ_1) berühren, so ist an diesem Punkte $\omega = 0$, also $\beta^2 = {\mu_1}^2$ und:

$$ {\mu_1}^2 = \mu^2 \cos^2\omega + \nu \sin^2\omega; \qquad (22) $$

mithin hat β^2 für alle geodätischen Linien, welche die Krümmungslinie $(\mu = \mu_1)$ berühren denselben Werth. —

Wenn eine geodätische Linie von einem Scheitel (Nabelpunkte) des Ellipsoides ausgeht, so ist bekanntlich $\mu^2 = \nu^2 = b^2$; folglich $\beta = b$, welche Richtung die geodätische Linie auch haben mag. —

Aus (22) erhellet: daß, wenn zwei geodätische Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren, d. h. für welche μ_1 constant ist, durch denselben Punkt (μ, ν) gehen, dieselben mit allen durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien gleiche Winkel bilden. —

Denn es ist:

$$ {\mu_1}^2 = \mu^2 \cos^2\omega + \nu^2 \sin^2\omega = \mu^2 \cos^2\omega + \nu^2 \sin^2\omega'; $$

also:

$$ \omega = \omega'. $$

Wenn von den beiden Scheiteln des Ellipsoides, welche in den Endpunkten seiner kleinsten Axe liegen, geodätische Linien nach irgend einem Punkte (μ, ν) einer Krümmungslinie, deren Gleichung $\mu = \text{const.}$ ist, gezogen werden; so ist die Summe der Längen dieser geodätischen Linien längs dieser ganzen Krümmungslinie constant. — Denn wenn r_1, r_2 diese Längen bezeichnen, so ist:

$$ dr_1 = d_\nu s \cos\omega, \quad dr_2 = -d_\nu s \cos\omega; $$

mithin:

$$ r_1 + r_2 = \text{const.} $$

Mit Hülfe des Satzes (3) auf S. 306 läßt sich auch leicht auf ähnliche Weise, wie in der ebenen Geometrie darthun: daß die geodätischen Radienvectoren mit der Krümmungslinie gleiche Winkel bilden.

Wenn zwei geodätiſche Linien zwei durch $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$ beſtimmte Krümmungslinien berühren und ſich in (μ, ν) rechtwinklig durchſchneiden, ſo iſt:

$$\mu_1^2 = \mu^2 \cos^2\omega + \nu^2 \sin^2\omega,$$

$$\mu_2^2 = \mu^2 \cos^2\omega' + \nu^2 \sin^2\omega'$$

$$= \mu^2 \sin^2\omega + \nu^2 \cos^2\omega;$$

alſo:

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \mu^2 + \nu^2 = \text{const},$$

und da nach der erſten der Gleichheiten (1') iſt:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2,$$

mithin:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 - b^2 - c^2$$

$$= \text{const.};$$

ſo folgt: daß der geometriſche Ort des Durchſchnittspunktes zweier ſolcher orthogonaler geodätiſcher Linien ein ſphäriſcher Kegelſchnitt, d. h. der Durchſchnitt des Ellipſoides mit einer concentriſchen Kugelfläche iſt. —

Wegen weiterer Eigenſchaften geodätiſcher Linien vergleiche man: 1) zwei Abhandlungen von Chasles in Liouville's Journal Vol. XI p. 3 und p. 105; 2) eine Abhandlung von M. Roberts ebendaſelbſt Vol. XIII p. 1 und 3) eine Abhandlung von Oſſian Bonnet im Journal de l'École Polytechnique, Cahier XXXIII, ſo wie beſonders auch das Supplement dazu. —

Druck der Hofbuchdruckerei von Ed. Krampe in Braunſchweig.

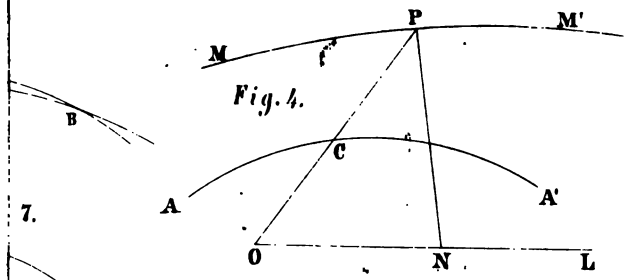
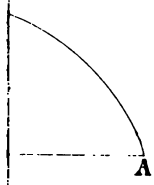


Fig. 4.

7.



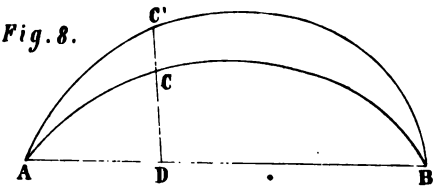
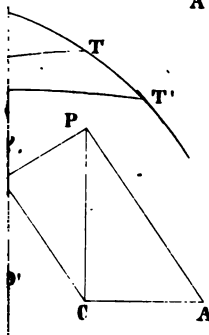


Fig. 8.



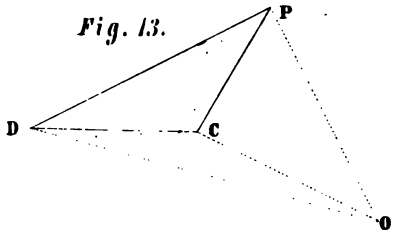


Fig. 13.

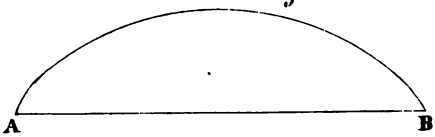


Fig. 17.

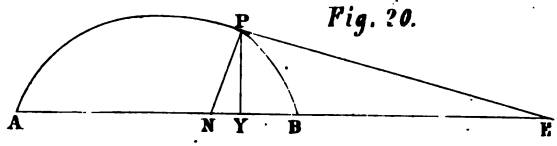


Fig. 20.